Educación Matemática

Sociedad Mexicana
de Investigación
y Divulgación
de la Educación
Matemática, A.C.

UNIVERSIDAD DE
GUADALAJARA
Red Universitaria e Institución Benemérita de Jalisco
Centro Universitario de Ciencias
Exactas e Ingenierías

Educación Matemática *vol. 36 • núm. 3 • diciembre de 2024*

© Educación Matemática, diciembre de 2024, vol. 36, núm. 3, es una publicación cuatrimestral editada por la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C., con domicilio en Adolfo Prieto 1734, Col. Del Valle centro, 03100, Benito Juárez, Ciudad de México, correo electrónico somidem2023@gmail.com y la Universidad de Guadalajara a través del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, dirección Blvd. Marcelino García Barragán #1421, esq. Calzada Olímpica, C.P. 44430, Guadalajara, Jalisco, México, correo electrónico educacion.matematica@administrativos.udg.mx

Editor responsable: Ernesto A. Sánchez Sánchez. Reserva de derechos al Uso Exclusivo del Título: 04-2015-10163264600-203, ISSN (web) 2448-8089, ambos otorgados por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Diagramación y corrección de estilo: Formas e Imágenes, S.A. de C.V., Av. Universidad 1953, edif. 2, loc. E, Copilco el Bajo, Coyoacán, 04330, Ciudad de México, formaseimagenes@gmail.com

Fecha de la última actualización 1 de agosto de 2024.

https://www.revista-educacion-matematica.org.mx

Contenido

EDITORIAL https://doi.org/10.24844/EM3603.00

Criterios de revisión y evaluación de contribuciones a la docencia

Ernesto Alonso Sánchez Sánchez,[1] Mario Sánchez Aguilar,[2] María del Socorro García González,[3] Luis Manuel Aguayo,[4] Carlos Valenzuela García,[5] Yolanda Chávez Ruiz[6]

El objetivo de una revista de investigación como *Educación Matemática* es publicar artículos que hagan aportaciones a la disciplina, aunque no siempre es fácil determinar cuándo un manuscrito está haciendo una genuina contribución. Heid (2010), exeditora del *Journal for Research in Mathematics Education* (JRME), subraya la importancia de que los manuscritos no solo presenten enfoques rigurosos y bien documentados, sino que también aporten nuevas perspectivas o profundicen en la comprensión de temas clave. Propone cuatro rasgos no excluyentes que ha observado en los artículos exitosos que se publican en JRME, resultado de su experiencia de varios años como editora, a saber;

Construcción sobre investigaciones previas: La investigación en educación matemática avanza cuando se apoya en estudios y teorías existentes,

[1] Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, esanchez@cinvestav.mx, https://orcid.org/0000-0002-8995-7962.

[2] Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA Legaria), Instituto Politécnico Nacional, mosanchez@ipn.mx, https://orcid.org/0000-0002-1391-9388.

[3] Universidad Autónoma de Guerrero, msgarcia@uagro.mx, https://orcid.org/0000-0001-7088-1075

[4] Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Zacatecas, l_aguo@yahoo.com.mx

[5] Departamento de Matemáticas del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara (UdeG), carlos.valenzuela@academicos.udg.mx, https://orcid.org/0000-0001-7897-7223.

[6] Instituto de Educación de Aguascalientes, yolachavezruiz@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-0955-4803.

expandiéndolos y profundizando en sus implicaciones; como dijo Newton, logramos ver más lejos al "subirnos en hombros de gigantes".

Aplicación de teorías en nuevos contextos: Algunos estudios exploran la aplicabilidad de teorías en diferentes entornos para enfrentar desafíos en la enseñanza de las matemáticas, incluyendo el trabajo en contextos culturales diversos o en poblaciones marginadas.

Estudios a gran escala sobre temas de interés actual: Las investigaciones a gran escala, que abarcan una amplia muestra de estudiantes o docentes, permiten validar hipótesis sobre temas relevantes y descubrir patrones y características que no se perciben en estudios de menor alcance.

Trascender las perspectivas actuales: Algunos estudios logran impulsar nuevas maneras de pensar sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, aportando enfoques más matizados, complejos o, en ciertos casos, más simplificados que los modelos tradicionales.

Heid aclara que no pretende ser exhaustiva ni que las características que propone sean las más significativas, sino que solo son material para la reflexión. Nosotros queremos tomar el segundo punto para argumentar la importancia de que haya investigaciones cuya aportación consista en la aplicación de teorías o resultados de la investigación en el contexto del aula y, por tanto, para desarrollar la práctica docente. (También el cuarto punto nos invita a llevar a cabo experiencias en el aula). Sintetizar los hallazgos principales destacando su relevancia para la práctica docente. Vincular los resultados con el objetivo de aprendizaje mostrando avances o retrocesos en la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes. Identificar limitaciones de la propuesta, tanto en lo que se refiere a la estructura del contenido matemático como al tratamiento didáctico en clase. Esta es la idea del tipo de manuscrito que clasificamos como "contribución a la docencia".

En la editorial del número anterior ofrecimos algunas indicaciones sobre la manera en que los miembros del Consejo directivo de la revista *Educación Matemática* llevamos a cabo la revisión técnica y de pertinencia de los manuscritos que nos han sido enviados en el formato de "Artículo", en esta nos proponemos hacer lo mismo para los manuscritos en el formato de "Contribución a la docencia"

Una contribución a la docencia consiste en la presentación sistemática de una propuesta de enseñanza sobre un tema relevante de las matemáticas escolares. Es importante que dicha propuesta haya sido implementada y esté bien fundamentada. Puede ser una conceptualización, no solo la descripción, de una experiencia innovadora que ofrezca pautas al docente para desarrollar un tema en el aula de clase o, puede ser la aplicación de una teoría o de resultados de la investigación con el mismo fin; en ambos casos se proporcionarán elementos para el mejoramiento de la práctica docente en la enseñanza de las matemáticas.

PERTINENCIA

Una contribución a la docencia tiene como lector/a potencial a los y las docentes de matemáticas de alguno de los niveles escolares del sistema educativo del país de origen. El tema matemático debe preferentemente estar incluido dentro del currículo de matemáticas de algún nivel educativo, considerar un marco pedagógico y una perspectiva didáctica.

ANTECEDENTES

El manuscrito hace referencia a estudios previos que se relacionen con el tema y que permiten ubicar la propuesta como parte de un esfuerzo colectivo para mejorar la enseñanza y el aprendizaje del tema. Además, se aclaran las relaciones entre las referencias elegidas con la propuesta que se presenta.

PRESUPUESTOS TEÓRICOS

En el caso de que la propuesta haya surgido de experiencias prácticas en el salón de clase se deben hacer explícitos los conceptos didácticos que emergen del análisis de la actividad. En el caso de que la propuesta haya sido diseñada con base en una teoría o metodología de enseñanza se expondrán los presupuestos que la fundamentan.

MÉTODO

Se ofrecen todos los elementos necesarios para reproducir la propuesta más allá del contexto de origen. Se aclara el contenido matemático, el nivel al que se dirige, el objetivo de aprendizaje y el acercamiento didáctico; estos deben ser consistentes.

RESULTADOS

El objetivo de esta sección es presentar los resultados o evidencias de la propuesta en relación con los presupuestos teóricos y el propósito de su implementación. Un resultado no es solo la constatación del éxito o avance en el aprendizaje, sino también pueden ser retrocesos u obstáculos; en todo caso, deben ser conceptualizados y significativos para la enseñanza.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Sintetizar los hallazgos principales destacando su relevancia para la práctica docente. Vincular los resultados con el objetivo de aprendizaje mostrando avances o retrocesos en la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes. Identificar limitaciones de la propuesta en lo que se refiere a la organización del contenido matemático o al tratamiento didáctico en clase.

 https://doi.org/10.24844/EM3603.01

Uma trajetória curricular sobre Números a partir de documentos curriculares de matemática da educação básica do Brasil e do Canadá

A curricular trajectory on Numbers based on mathematics curriculum documents for elementary education in Brazil and Canada

Leticia Rangel,[1] Priscila D. Corrêa[2]

Resumo: Discussões sobre currículo têm ocupado o cenário mundial no campo da educação matemática, levando à projeção do assunto na literatura de pesquisa. Concomitante com esse movimento, muitos países vêm estabelecendo reformas em seus sistemas de ensino, como são os casos do Brasil e do Canadá. A partir de uma abordagem metodológica qualitativa, tendo como referência documentos curriculares desses dois países, este estudo oferece uma representação esquemática multidimensional sobre o ensino de números do 1º ao 6º ano da educação básica, a trajetória curricular. Tal modelo esquemático é parte e produto da análise documental conduzida. Pretende-se assim contribuir para as discussões sobre currículo a partir da identificação de paridades e contrastes em orientações curriculares oficiais do Brasil e do Canadá. Tal investigação evidencia aspectos relacionados ao ensino de números que não necessariamente são notados na leitura isolada ou na implementação direta de um currículo. Este estudo tem o potencial de promover a reflexão sobre os

Fecha de recepción: 15 de mayo de 2023. **Fecha de aceptación:** 23 de agosto de 2024.
[1] Colégio de Aplicação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil, leticiarangel@ufrj.br, https://orcid.org/0000-0001-5228-4613
[2] Faculty of Education, University of Windsor, Canada, priscila.correa@uwindsor.ca https://orcid.org/0000-0003-4529-5562

processos de ensino e contribuir para o desenvolvimento do conhecimento próprio do professor de matemática.

Palavras-chave: *leitura combinada, trajetória curricular, ensino de números, educação básica.*

Abstract: Discussions about curriculum have occupied the world stage in the field of mathematics education, leading to the rise of the subject in the research literature. Concomitantly, many countries have been establishing reforms in their education systems, like Brazil and Canada. This study implements a qualitative methodological approach based on curricular documents from these two countries. It offers a multidimensional schematic representation of the teaching of numbers from grades 1 to 6 of elementary education, the curricular trajectory. Such a schematic model is part and product of the documental analysis conducted. The aim is to contribute to discussions about the curriculum by identifying parities and contrasts in official curricular guidelines from Brazil and Canada. This investigation highlights aspects related to the teaching of numbers that are not necessarily noticed in an isolated reading or in the direct implementation of a curriculum. This study has the potential to promote reflection on teaching processes and contribute to the development of mathematics knowledge for teaching.

Keywords: *combined reading, curricular trajectory, teaching of numbers, elementary education.*

1. INTRODUÇÃO

Discussões sobre currículo têm ocupado o cenário mundial. Muitos países, cidades e regiões vêm estabelecendo reformas curriculares (Artigue, 2018; Li e Lapan, 2014; Shimizu e Vithal, 2018). Li e Lappan (2014) destacam que, apesar de, ao longo da história, amplas reformas educacionais terem alcançado o currículo de matemática, só recentemente o mesmo passou a ser objeto de pesquisa. Além disto, Rojano e Solares-Rojas (2018) explicam que "apesar do reconhecimento generalizado do papel decisivo do currículo no ensino, a literatura de pesquisa em educação matemática é notoriamente escassa neste tópico" (p. 475, tradução nossa).

Este estudo tem como objetivo elaborar e apresentar uma representação multidimensional – a *trajetória curricular* – que oferece um panorama do ensino de números segundo orientações curriculares de matemática para a educação básica do Brasil e do Canadá. Esses países, de atuação profissional das autoras, vêm passando pelos processos de revisão e de implementação de mudanças curriculares. A proposição de uma *trajetória curricular* tem como base a identificação de *paridades e contrastes* nos documentos do 1º ao 6º ano da educação básica. Pretende-se, assim, contribuir para discussões sobre currículo, apresentando uma potencial ferramenta para estudos analíticos sobre o ensino de números. Consonante com Li e Lappan (2014), entendemos que: "Aprender e compartilhar o currículo de matemática e suas mudanças em diferentes sistemas de educação deve fornecer uma lente única para avançar a pesquisa e a prática curriculares a partir de uma perspectiva internacional" (p. 3, tradução nossa). Em particular, a investigação sobre currículos contribui para o desenvolvimento do conhecimento de matemática para o ensino (Ball *et al.*, 2008; Remillard, 2005).

A relação estabelecida na *trajetória curricular* não pretende oferecer juízo de valor entre o ensino de números no Brasil e no Canadá, apontando, por exemplo, qual país exerce as melhores escolhas curriculares. Entendemos que cada país tem suas particularidades e que, por razões diversas, o que é apropriado para um pode não ser adequado para o outro. Não questionamos as "*raisons d'être*" dos currículos nem o valor dos documentos orientadores, partimos do princípio de que estes documentos existem e têm um papel central na prática docente.

> Suas *raisons d'être* situam-se em diferentes níveis, *raisons d'être* no que dizem respeito ao conteúdo de ensino, ao equilíbrio e às relações entre disciplinas escolares, aos métodos pedagógicos ou *raisons d'être* no que se refere mais geralmente ao contrato social entre uma sociedade e sua escola, que são, cada vez mais, a expressão de visões supranacionais. (Artigue, 2018, p. 43, tradução nossa)

Na seção a seguir, Números: Um Tema Elementar, apresenta-se uma breve discussão sobre o ensino de números. A terceira seção, Orientações Curriculares: A Base do Estudo, apresenta os documentos curriculares em que se fundam o estudo: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) e a Grade Comum Curricular[3] (CCF) (Alberta Education, 2006). Estabelecemos ainda uma

[3] Common Curricular Framework (CCF)

relação estrutural entre tais documentos. A quarta seção, O Estudo, visa à descrição da investigação realizada e constitui o cerne do documento: apresenta-se a *trajetória curricular*. A partir de uma abordagem qualitativa, são discutidos caminhos metodológicos e o processo de construção dos resultados. Para isso, estabelecemos uma metodologia de análise – a *leitura combinada* – que se estrutura a partir da identificação de quatro ênfases: *panorama*, *aspectos elementares*, *paridades e contrastes*, e *trajetória curricular* (Corrêa e Rangel, 2024). Por fim, nas Considerações Finais, destacamos potenciais desdobramentos da investigação.

2. NÚMEROS: UM TEMA ELEMENTAR

Qualquer que seja a subdivisão que oriente uma organização da matemática escolar, *números* certamente é uma das unidades distinguidas. A aprendizagem de números envolve conceitos, operações e processos essenciais para o conhecimento de matemática e para o engajamento e a atuação do indivíduo no mundo (Kilpatrick *et al.*, 2001; Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2013). Tal reconhecimento não encerra hierarquia, o ensino de números não é mais importante do que o de geometria ou de álgebra, por exemplo. Ressaltamos, no entanto, seu valor elementar para o letramento matemático. Quantificar marca os primeiros contatos da criança com a matemática escolar e segue fundamental para os demais assuntos próprios da educação matemática. Números é, portanto, o tema foco desta investigação.

> A centralidade de números como um conceito-chave em todas as outras áreas da matemática [...] e para o próprio raciocínio matemático, é inegável. A compreensão dos alunos sobre os princípios e propriedades algébricas experimentados pela primeira vez por meio do trabalho com números é fundamental para a compreensão sobre os conceitos de álgebra do ensino médio. (OECD, 2013, p.11, tradução nossa)

A centralidade do conceito é tão relevante quanto a sua complexidade. Há muito o que ensinar e aprender sobre números. Para Bass (2018), o ensino de números na educação escolar envolve dois aspectos fundamentais: o conceitual (o que são) e o nominal (como nomeá-los e representá-los). A autora entende que "antes de as crianças entrarem na escola, elas já adquiriram um senso de quantidade, de comparação primitiva de tamanho, bem como de contagem" (p.465, tradução nossa), uma familiarização inicial com os números naturais. No entanto, números vão além da noção inicial de quantidade; estão associados à medida, a verificar quanto uma unidade cabe no que se quer contar ou medir. É nesse contexto que emergem as frações, que "têm sua própria representação notacional, distinta do valor posicional de base dez dos números inteiros" (Bass, 2018, p. 465, tradução nossa). Chega-se, assim, ao universo dos números racionais. Além disto, Bass ressalta a relação direta entre a representação dos números e algoritmos próprios para efetuar as operações básicas.

As noções iniciais que as crianças trazem ao chegar à escola, conceituais ou nominais, devem ser ampliadas e aprofundadas no ensino escolar, promovendo a aprendizagem necessária sobre o tema. Mas o que sobre números deve ser ensinado na escola? O que se espera que os alunos aprendam? Que distribuição sequencial deve ser dada ao tema? Com que aprofundamento? Uma maneira de investigar e promover a reflexão sobre o ensino do assunto é a partir de documentos curriculares. Essa é a abordagem que sustenta a proposta deste trabalho.

3. ORIENTAÇÕES CURRICULARES: A BASE DO ESTUDO

De forma geral, um currículo pode ser visto como um documento que orienta ações e propõe parâmetros que têm por objetivo a promoção de educação de qualidade. Como destacado no glossário de terminologia curricular da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura [UNESCO] (2016), diferentes comunidades e instituições estão envolvidas na formulação de currículos, o que reflete uma variedade de interesses, que certamente alcançam a educação matemática do indivíduo e da sociedade como um todo. De forma simples, o glossário UNESCO define currículo como: "uma descrição do que, por quê, como e quão bem os estudantes devem aprender, sistemática e intencionalmente" (p. 30), destacando que "currículo não é um fim em si, mas um meio para fomentar uma aprendizagem de qualidade" (p. 30). O currículo é um registro do que se deve ensinar nas escolas, e serve de norteador e de suporte para professoras e professores e, portanto, pode ser um ponto de partida para investigar o ensino da matemática (Li e Lappan, 2014; Shimizu e Vithal, 2018). O presente estudo se concentra na descrição da distribuição dos conteúdos matemáticos a serem ensinados, ou seja, do que ensinar, e não explora porquê, como ou quão bem ensinar.

Distinguem-se diferentes dimensões de um mesmo currículo: pretendido, implementado, e aprendido (UNESCO, 2016; Valverde *et al*., 2002, Macedo, 2006). O objeto deste estudo é específico: a distribuição curricular de matemática em documentos oficiais, ou seja, o currículo pretendido. No entanto, consonantes com Macedo (2006), entendemos os currículos pretendido e implementado como não conflitantes, como partes inerentes e imbricadas do planejamento e da ação no ensino escolar, portanto, relativos à prática docente. Apesar de não explorarmos aspectos do currículo implementado, tais como, a prática de sala de aula e os livros didáticos, o estudo realizado envolve interpretação e análise, etapas que determinam a transformação do currículo pretendido em implementado. Nosso objetivo é, a partir de referências curriculares entendidas como currículos pretendidos, oferecer uma representação sintética e esquemática que contribua para o conhecimento de matemática para o ensino de professoras e professores, dando suporte à tomada de decisão na implementação de um currículo.

Para tanto, este estudo analisa orientações curriculares de dois países – a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Brasil (Brasil, 2018), e a Grade Comum Curricular (CCF) das províncias do oeste e territórios do norte do Canadá (Alberta Education, 2006). Considerando a estrutura e o caráter desses documentos, as grades curriculares propostas decerto chegam às escolas e influenciam os processos de ensino e de aprendizagem da matemática. O documento canadense oferece uma orientação que alcança as províncias e territórios do oeste e do norte do país, configurando caráter regional e eletivo. Já o documento brasileiro constitui uma base curricular comum, de alcance nacional e de caráter obrigatório.

Em particular, investigamos o tema números nos anos escolares dirigidos a estudantes dos 6 (seis) aos 11 (onze) anos, o que equivale aos seis primeiros anos de educação escolar na BNCC e na CCF. Os documentos têm estruturas curriculares seriadas correspondentes que oferecem material organizado, claro e consistente, promovendo condições para o estudo. A análise realizada compõe um infográfico multidimensional que relaciona e destaca *paridades e contrastes* nos documentos curriculares analisados, respeitando a distribuição sequencial dos conteúdos nas grades da BNCC e da CCF. Chamamos esse infográfico de *trajetória curricular*.

3.1 A Base Curricular Brasileira

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) é um documento de caráter normativo que determina diretrizes curriculares gerais para a educação escolar em todo o território nacional brasileiro. A BNCC é específica sobre os objetivos de aprendizagem de cada ano escolar, definindo "o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica" (p. 7). O documento deve ser referência fundamental para a composição de currículos dos sistemas e das redes escolares locais e regionais do país, que devem integrar ao texto normativo aspectos sociais, culturais e metodológicos. A BNCC declara o compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como:

> as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição) (Brasil, 2018, p. 266).

No documento, equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação compõem um conjunto de ideias fundamentais que, segundo o documento, promovem a articulação entre os diferentes campos da matemática – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade. Os diversos campos e as ideias fundamentais determinam a identificação de cinco unidades temáticas na distribuição curricular da BNCC: Números, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, e Estatística e Probabilidade. Objetos de conhecimento – que correspondem a conteúdos, conceitos e processos – e suas respectivas habilidades – aprendizagens essenciais que devem ser alcançadas pelos alunos – são organizados segundo essas unidades e anos escolares. Sendo assim, a distribuição curricular de matemática no Ensino Fundamental é marcada pela distinção de unidades, objetos de conhecimento e habilidades, como ilustra a figura I.

MATEMÁTICA – 2º ANO

UNIDADES TEMÁTICAS	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Números	Leitura, escrita, comparação e ordenação de números de até três ordens pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e papel do zero)	**(EF02MA01)** Comparar e ordenar números naturais (até a ordem de centenas) pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e função do zero). **(EF02MA02)** Fazer estimativas por meio de estratégias diversas a respeito da quantidade de objetos de coleções e registrar o resultado da contagem desses objetos (até 1000 unidades). **(EF02MA03)** Comparar quantidades de objetos de dois conjuntos, por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois, entre outros), para indicar "tem mais", "tem menos" ou "tem a mesma quantidade", indicando, quando for o caso, quantos a mais e quantos a menos.
	Composição e decomposição de números naturais (até 1000)	**(EF02MA04)** Compor e decompor números naturais de até três ordens, com suporte de material manipulável, por meio de diferentes adições.
	Construção de fatos fundamentais da adição e da subtração	**(EF02MA05)** Construir fatos básicos da adição e subtração e utilizá-los no cálculo mental ou escrito.
	Problemas envolvendo diferentes significados da adição e da subtração (juntar, acrescentar, separar, retirar)	**(EF02MA06)** Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até três ordens, com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, utilizando estratégias pessoais.
	Problemas envolvendo adição de parcelas iguais (multiplicação)	**(EF02MA07)** Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4 e 5) com a ideia de adição de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável.
	Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte	**(EF02MA08)** Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.

Figura I. Unidade Temática Números – 2º Ano – Objetos de Conhecimento e Habilidades, BNCC (Brasil, 2018, pp. 282-283, adaptado).

3.2 A Grade Curricular Canadense

A Grade Comum Curricular (CCF) (Alberta Education, 2006) constitui uma base curricular comum de matemática adotada por sete das dez províncias e pelos três territórios canadenses (Simmt, 2018). O documento canadense, que contempla o ensino de matemática na etapa fundamental de escolaridade, afirma que a educação matemática tem como objetivo preparar os alunos para:

> usar a matemática com confiança para solucionar problemas; se comunicar e raciocinar matematicamente; apreciar e valorizar a matemática; fazer conexões entre a matemática e suas aplicações; se comprometer com uma aprendizagem duradoura; se tornar adultos letrados em matemática, usando a matemática para contribuir para a sociedade (Alberta Education, 2006, p. 4, tradução nossa).

A organização do documento se dá em torno de quatro unidades temáticas – Números, Padrões e Relações, Forma e Espaço, e Estatística e Probabilidade; cada uma com seus respectivos objetivos gerais (general outcomes). Orientados pelos objetivos gerais, são determinados objetivos específicos (specific outcomes) – que identificam as habilidades, compreensões e conhecimentos que os alunos devem alcançar em um determinado ano (figura II). Para cada objetivo específico, a CCF estabelece ainda uma série de indicadores de aprendizagem, que ilustram o que pode ser esperado dos alunos em relação à aprendizagem de cada um dos objetivos curriculares. São balizadores que visam a orientar o professor, contribuindo para uma melhor compreensão dos objetivos específicos.

Grade 2

General Outcome

Develop number sense.

Specific Outcomes

[C]	Communication	[PS]	Problem Solving
[CN]	Connections	[R]	Reasoning
[ME]	Mental Mathematics and Estimation	[T]	Technology
		[V]	Visualization

1. Say the number sequence from 0 to 100 by:
   - 2s, 5s and 10s, forward and backward, using starting points that are multiples of 2, 5 and 10 respectively
   - 10s using starting points from 1 to 9
   - 2s starting from 1.

   [C, CN, ME, R]
2. Demonstrate if a number (up to 100) is even or odd.
   [C, CN, PS, R]
3. Describe order or relative position using ordinal numbers (up to tenth).
   [C, CN, R]
4. Represent and describe numbers to 100, concretely, pictorially and symbolically.
   [C, CN, V]
5. Compare and order numbers up to 100.
   [C, CN, R, V]
6. Estimate quantities to 100 using referents.
   [C, ME, PS, R]
7. Illustrate, concretely and pictorially, the meaning of place value for numerals to 100.
   [C, CN, R, V]
8. Demonstrate and explain the effect of adding zero to or subtracting zero from any number.
   [C, R]
9. Demonstrate an understanding of addition (limited to 1 and 2-digit numerals) with answers to 100 and the corresponding subtraction by:
   - using personal strategies for adding and subtracting with and without the support of manipulatives
   - creating and solving problems that involve addition and subtraction
   - explaining that the order in which numbers are added does not affect the sum
   - explaining that the order in which numbers are subtracted may affect the difference.

   [C, CN, ME, PS, R, V]
10. Apply mental mathematics strategies, such as:
    - using doubles
    - making 10
    - one more, one less
    - two more, two less
    - addition for subtraction

    to determine basic addition facts to 18 and related subtraction facts.
    [C, CN, ME, R, V]

Figura II. Unidade Temática Números – 2º Ano – Objetivo Geral e Objetivos Específicos, CCF (Alberta Education, 2006, pp. 18, 20, 22, 24, adaptado).

Duas ideias orientam a distribuição e a determinação dos objetivos específicos e dos indicadores de aprendizagem ao longo da escolaridade: natureza da matemática e processos matemáticos. Na CCF, natureza da matemática é explicada a partir da identificação de componentes intrínsecos: variação, conservação, senso numérico, padrões, relações, senso espacial, e incerteza. Já os processos matemáticos, precisam ser vivenciados pelos estudantes e devem, portanto, permear as aulas de matemática: comunicação, conexões, cálculo mental e estimativa, resolução de problemas, raciocínio, tecnologia, e visualização.

3.3 Correlação entre a BNCC e a CCF

A BNCC e a CCF orientam que os alunos sejam estimulados a, por exemplo, investigar, raciocinar, representar, argumentar, comunicar, resolver problemas e estimar; os documentos não encorajam memorização nem processos sem significado. Ambos propõem a abordagem a partir da resolução de problemas e o uso de calculadora e de recursos digitais. Além disto, as estruturas organizacionais dos dois documentos distinguem unidades temáticas, anos escolares e objetivos de aprendizagem, que permitem identificar a distribuição dos conteúdos a serem ensinados, estabelecendo progressivamente as metas de aprendizagem cognitiva ao longo da escolaridade. Identificam-se assim *elementos estruturantes* dos documentos: na BNCC, os objetos de conhecimento e as habilidades e, na CCF, os objetivos específicos e os indicadores de aprendizagem (tabela I).

Tabela I: Exemplo de *Elementos Estruturantes*

BNCC – 2º Ano	CCF – 2º Ano
Objetos de Conhecimento: Leitura, escrita, comparação e ordenação de números de até três ordens pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e papel do zero). Habilidades: (EF02MA01) Comparar e ordernar números naturais (até a ordem de centenas) pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e função do zero).	Objetivos Específicos: 5) Comparar e ordernar números até 100. Indicadores de Aprendizagem: • Ordenar um determinado conjunto de números em ordem crescente ou decrescente e verificar o resultado usando quadro identificador de uma centena, reta numérica, quadro de composição de dezenas ou fazendo referência ao valor posicional. • Identificar erros numa determinada sequência ordenada. • Identificar números ausentes num quadro identificador de uma centena. • Identificar erros num quadro identificador de uma centena.

Fonte: BNCC (Brasil, 2018, p. 283) e CCF (Alberta Education, 2006, p. 64, tradução nossa).

Os *elementos estruturantes* marcam as grades curriculares da BNCC e da CCF, listam *o quê* ensinar apontando objetivos de aprendizagem e habilidades a serem desenvolvidas. Têm foco no conteúdo, sem intenção específica na orientação pedagógica, ou seja, no que se refere ao *como* ensinar. A centralização na aprendizagem e não no ensino se manifesta na redação das habilidades (na

BNCC) e dos objetivos específicos (na CCF), cujos verbos apontam para o que se espera que o aluno aprenda. Os *elementos estruturantes* identificados nas orientações curriculares brasileira e canadense fundamentam este estudo.

4. O ESTUDO

Estudos comparativos entre currículos têm abordagens diversas: identificar aspectos comuns e especificidades (e.g. Pires, 2013; Wang e McDougall, 2019, Cerqueria e Silva, 2020; Acar e Serçe, 2021); buscar dados que evidenciem a adesão ou a rejeição de professoras e professores (e.g. Charalambous e Philippou, 2010); investigar como os currículos se efetivam nas salas de aula (e.g. Wang e Fan, 2021; Lui e Leung, 2013); pesquisar melhores práticas (e.g. Villalobos Torres e Trejo Sánchez, 2015); analisar bases sociais, culturais, econômicas e políticas (e.g. Bickmore *et al.*, 2017), fazer uma análise histórica comparativa (e.g. Bessot e Comiti, 2006), entre outros (e.g. Son et. al, 2017).

Nossa proposta é, a partir da metodologia *leitura combinada* (Corrêa e Rangel, 2024), elaborar e apresentar a *trajetória curricular*, uma representação multidimensional que, de forma esquemática, oferece uma visão combinada da organização sequencial do ensino de números segundo as orientações curriculares de matemática para a educação básica do Brasil e do Canadá. Para isso, são considerados os *elementos estruturantes* da distribuição sequencial dos conteúdos na BNCC e na CCF. Acreditamos que a composição da *trajetória curricular*, que permite a leitura concomitante das duas grades analisadas, pode ser em si uma contribuição para estudos sobre currículo. A *trajetória curricular* pode, por exemplo, (i) ser referência para comparações pontuais entre os documentos analisados e propostas curriculares, (ii) ser ampliada a partir da inclusão da distribuição curricular de outros documentos, e (iii) ser adaptada para contemplar outros assuntos além do ensino de números ou outros anos escolares.

A metodologia *leitura combinada* funda-se em uma abordagem qualitativa baseada na análise documental, no caso, da BNCC e da CCF. Segundo Sharma (2013), a análise documental é uma metodologia de pesquisa que se fundamenta em publicações originais ou primárias visando a um objetivo ou a uma questão de pesquisa. Para Zanette (2017), na pesquisa qualitativa, "o pesquisador depara-se constantemente com a necessidade de conhecer e discutir sobre o caminho a percorrer a fim de elaborar de que forma transformar o fenômeno de investigação em um objeto de pesquisa" (p.150). Este estudo (i) coleta informações diretamente nos documentos indicados, (ii) realiza uma análise qualitativa dos dados obtidos, e (iii) propõe uma *trajetória curricular*, que reflete a abordagem de números nos seis primeiros anos do ensino escolar nos documentos analisados.

A figura III ilustra a *leitura combinada*, o processo metodológico do estudo. O caráter qualitativo da metodologia determinou que a análise fosse realizada de forma dinâmica, levando à identificação de quatro ênfases interdependentes, sem relação hierárquica entre elas: (i) *panorama* – caracterizada por uma leitura concomitante dos documentos, ponto de partida da análise; (ii) *aspectos elementares* – caracterizada pela identificação, nas referências curriculares, de aspectos elementares no ensino de números; (iii) *paridades e contrastes* – caracterizada pela identificação de equivalências, similaridades e diferenças emergentes dos *elementos estruturantes* dos documentos; e (iv) *trajetória curricular* – caracterizada pelo mapeamento simultâneo das duas propostas curriculares. Apesar das quatro ênfases terem focos diferentes, o processo de análise e construção da *trajetória curricular* se caracterizou pela interposição das mesmas, em particular das ênfases *panorama*, *aspectos elementares*, e *paridades e contrastes*. A ênfase *trajetória curricular* tem natureza conclusiva. Cada uma destas ênfases será detalhada nas subseções que seguem.

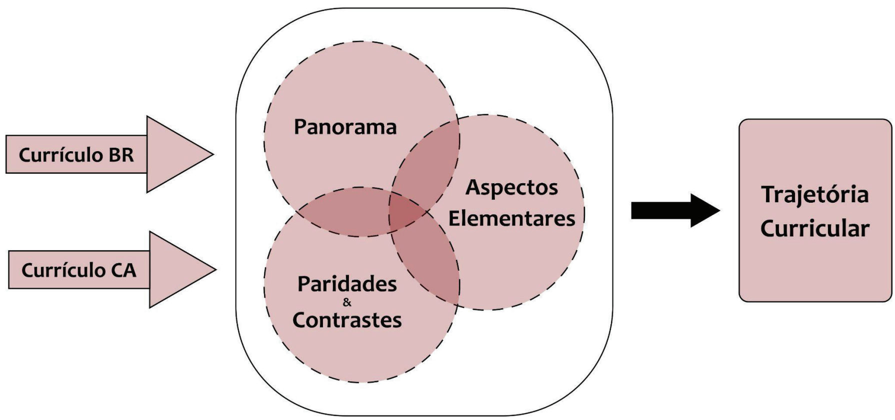


Figura III. Processo Metodológico: *Leitura Combinada*.

4.1 Panorama

A ênfase *panorama* tem caráter inicial, é marcada por uma leitura concomitante dos documentos, e visou à obtenção de uma perspectiva geral da proposta de construção do conceito de número evidenciada em cada um dos documentos curriculares analisados. Nesse processo de leitura, buscou-se relacionar os *elementos estruturantes* dos documentos. Tal exercício evidenciou que, na maioria dos casos, não era possível estabelecer equivalência (o que já era esperado). Assim, estabelecemos que a análise deveria acomodar similaridades e diferenças entre os *elementos estruturantes*. Por exemplo, observando a tabela I, tem-se, para o mesmo ano escolar – 2º ano, "**comparar e ordenar** números naturais (até a ordem de centenas) pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e função do zero)" (Brasil, 2018, p. 283, realce nosso) como uma habilidade da BNCC e "**comparar e ordenar** números até 100" (Alberta Education, 2006, p. 64, tradução nossa, realce nosso) como um objetivo específico da CCF. As indicações de considerar até a ordem das centenas, no documento brasileiro, ou números menores do que 100, no documento canadense, caracterizam uma diferença entre os *elementos estruturantes* de cada documento. Entretanto, existe uma relação entre eles, ambos se referem à comparação e à ordenação de números naturais. Outro exemplo em que não há equivalência é na orientação de abordagem de números inteiros no 6º ano da CCF, tema que não aparece antes do 7º ano na BNCC. O desenvolvimento da ênfase *panorama* fez emergir a necessidade de duas categorias de análise: uma que distinguisse *aspectos elementares* nos *elementos estruturantes* e outra que observasse *paridades e contrastes* entre os *elementos estruturantes*.

4.2 Aspectos Elementares

Klein identificava como matemática elementar as partes essenciais que encerram a capacidade de sustentar e de estruturar a Matemática (Kilpatrick, 2008; Schubring, 2014). Assim, na concepção de Klein, matemática elementar não é sinônimo de uma matemática facilitada, tampouco se refere a uma matemática simples ou fácil. O conceito de número é um bom exemplo: envolve em sua essência abstração e as noções de correspondência biunívoca, unidade, representação, além de encerrar diferentes propriedades e características, determinando os diversos universos numéricos. A história do conceito de número até sua concepção atual revela que não se trata de algo fácil, nem que possa ser facilitado. No entanto, ninguém discute seu valor elementar para a Matemática.

Por *aspectos elementares*, tendo como referência a concepção de matemática elementar de Klein, nos referimos a conceitos e compreensões que sustentam a aprendizagem de um novo tópico. Por exemplo, visando à aprendizagem de números naturais, comparação e ordenação são *aspectos elementares*. Outro *aspecto elementar* da compreensão de números naturais é representação. Portanto, na análise dos documentos, comparação, ordenação e representação foram distinguidos como *aspectos elementares*. No processo de distinção de *aspectos elementares* a partir dos documentos analisados, deu-se protagonismo ao conteúdo e à respectiva distribuição sequencial, e não a orientações pontuais que compõem os *elementos estruturantes*. É, por exemplo, o caso de distinguir comparação e ordenação como *aspectos elementares* e não distinguir a limitação da ordem dos números envolvidos (tabela I). Os *aspectos elementares* que emergiram neste estudo não esgotam os *concernentes à* construção do conceito de números. Não pretendemos propor uma lista básica de *aspectos elementares* sobre o tema, apenas destacamos aqueles evidenciados em nossa análise nos currículos analisados.

A distinção dos *aspectos elementares* é um pilar para a construção da *trajetória curricular*. Não é trivial associar dois *elementos estruturantes* a partir da íntegra de suas redações. Consideremos os *elementos estruturantes* destacados na tabela II, que se referem à abordagem inicial de frações. Nossa análise permite distinguir *aspectos elementares* em suas redações: ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes, conceitos de frações unitárias e de frações em geral, conceitos de frações próprias e impróprias, construtos parte/todo e quociente, equivalência, comparação e ordenação. A *trajetória curricular* não traz a redação completa dos *elementos estruturantes*. Nela distinguem-se os *aspectos elementares* observados, visando a uma percepção sintética e panorâmica, como em um efeito *zoom out*. Por exemplo, nos *elementos estruturantes* do 5º ano dos dois referenciais curriculares identificamos os *aspectos elementares* equivalência e comparação e ordenação de frações, que são destacados e associados aos dois países na *trajetória curricular* (figura IV). No entanto, no 6º ano, apenas o documento brasileiro volta a tratar de tais *aspectos elementares*. A trajetória não registra, então, esses *aspectos elementares* na dimensão canadense nesse ano escolar. Pode-se observar ainda que apenas o documento canadense propõe a abordagem de comparação de frações no 3º ano, ano que marca o início do início de frações em ambos os documentos.

Tabela II. *Elementos Estruturantes* – Abordagem Inicial de Frações

	BNCC	CCF
3º Ano	(EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes. (p. 287)	13) Demonstrar entendimento de frações: • explicando que uma fração representa parte de um todo, • descrevendo situações nas quais frações são utilizadas, • comparando frações de um mesmo inteiro com denominadores iguais. (p. 78)
4º Ano	(EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso. (p. 291)	8) Demonstrar entendimento de frações menores que ou iguais a um usando representações concretas e pictóricas para: • nomear e registrar frações para as partes de um todo ou conjunto, • comparar e ordenar frações, • modelar e explicar que para diferentes inteiros, duas frações idênticas podem não representar a mesma quantidade, • fornecer exemplos de onde as frações são usadas. (p. 89)
5º Ano	(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso. (EF05MA04) Identificar frações equivalentes. (EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica. (p. 295)	7) Demonstrar entendimento de frações usando representações concretas e pictóricas para: • criar um conjunto de frações equivalentes, • comparar frações com denominadores iguais e diferentes. (p. 99)
6º Ano	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. (EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. (p. 301)	4) Relacionar frações impróprias e números mistos. (p. 110)

Fonte: BNCC (Brasil, 2018) e CCF (Alberta Education, 2006, tradução nossa)

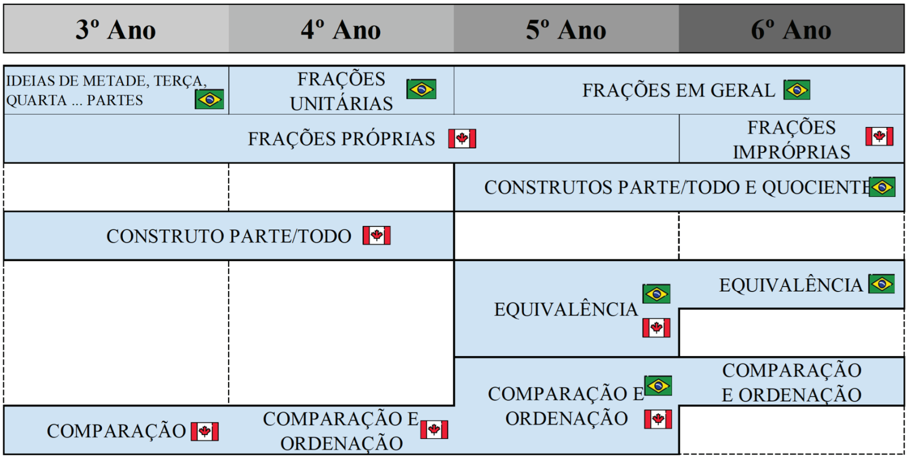


Figura IV. *Aspectos Elementares* referentes à Abordagem Inicial de Frações – recorte da *Trajetória Curricular* (Adaptado de Corrêa e Rangel, 2021, p. 4478, tradução nossa).

Não se espera uma correspondência um a um entre *elementos estruturantes* e *aspectos elementares*. Um mesmo *elemento estruturante* pode estar associado a mais do que um *aspecto elementar*, assim como um *aspecto elementar* pode ser observado em mais do que um *elemento estruturante*. Por exemplo, no único *elemento estruturante* do 4º ano no documento canadense, que corresponde à introdução do conceito de frações, identificamos os seguintes *aspectos elementares*: frações próprias, construto parte/todo, e comparação e ordenação. Anos escolares também não são restritivos: anos escolares diferentes podem tratar de um mesmo *aspecto elementar*. É o caso, por exemplo, da comparação de frações. O documento canadense trata desse *aspecto elementar* do 3º ao 5º ano escolar. Já o documento brasileiro, no 5º e no 6º ano.

4.3 Paridades e Contrastes

Esta ênfase, tendo como balizadores os *aspectos elementares*, é caracterizada pelo processo de identificação de equivalências, similaridades e diferenças nos *elementos estruturantes* dos documentos, determinado as categorias de análise: *paridades* e *contrastes*. As *paridades* são identificadas a partir de *elementos estruturantes* de anos escolares correspondentes que sejam equivalentes, que tenham grande semelhança, ou que tratem, ainda que com alguma diferença de abordagem, de um mesmo *aspecto elementar*. Já os *contrastes* correspondem à identificação de *elementos estruturantes* que revelem diferenças fundamentais ou que se baseiem em princípios ou anos escolares distintos.

Por exemplo, como destacado na tabela III, a multiplicação de números naturais, considerada como um *aspecto elementar*, é objeto de conhecimento no documento brasileiro desde o 2º ano escolar. A multiplicação de números naturais também é objetivo específico do documento canadense e aparece pela primeira vez no 3º ano escolar. A análise desses *elementos estruturantes* revela *paridades e contrastes*. Como *paridade*, identificamos que a multiplicação é objeto de ensino de números naturais presente nos dois documentos curriculares e que ambos iniciam a abordagem limitando os fatores a números menores ou iguais a 5. Já o início da abordagem em anos escolares diferentes revela um *contraste*: 2º ano escolar no documento brasileiro e 3º no canadense. Esse não é o único *contraste* que pode ser observado a partir dos *elementos estruturantes* destacados. O currículo canadense traz a orientação de que a multiplicação e a divisão sejam relacionadas. Estabelecer essa relação não aparece como uma determinação explícita nas habilidades que compõem a grade do 3º ano da BNCC, o que indica um *contraste*.

Tabela III. *Elementos Estruturantes* – Multiplicação de Números Naturais

BNCC – 2º e 3º Anos	CCF – 3º Ano
(EF02MA07) **Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4 e 5)** com a ideia de adição de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável. (p.283) (EF03MA07) **Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4, 5 e 10)** com os significados de adição de parcelas iguais e elementos apresentados em disposição retangular, utilizando diferentes estratégias de cálculo e registros. (p.287)	11) **Demonstrar compreensão de multiplicação até 5×5**: • representando e explicando multiplicação usando agrupamentos iguais e matrizes, • criando e resolvendo problemas em contextos que envolvam multiplicação, • modelando multiplicação usando representações concretas e visuais, e registrando o processo simbolicamente, • relacionando multiplicação com adição repetida; • relacionando multiplicação com divisão. (p. 77)

Fonte: BNCC (Brasil, 2018, realce nosso) e CCF (Alberta Education, 2006, tradução nossa, realce nosso)

Neste estudo, não visamos a refinar ou a aprofundar a discussão sobre *paridades* ou *contrastes* relativos a um tópico ou *aspecto elementar* específico. Por exemplo, não investigamos ou questionamos as razões para a limitação a números menores ou iguais a 5 na abordagem inicial de multiplicação. Também não questionamos as possíveis implicações de estar explícito ou não a necessidade de relacionar as operações de multiplicação e de divisão. Reconhecemos o valor desses questionamentos como uma investigação legítima e natural, que podem (e talvez devam) ser desdobramentos deste estudo. Uma discussão nesse sentido, é apresentada em Corrêa e Rangel (2021). Nesse trabalho, analisamos duas propostas curriculares relacionadas ao mesmo conteúdo matemático – o ensino de frações do 1º ao 6º ano. A análise sugere questionamentos tais como: Por que (ou por que não) diferenciar frações próprias e impróprias no ensino de frações? Qual a potencial contribuição ou limitação do ensino da comparação e ordenação de frações associadas à equivalência de frações? Aspectos dessa investigação serão apresentados na subseção a seguir.

4.4 Trajetória Curricular

A necessidade de sistematizar e organizar *paridades* e *contrastes,* considerando os *aspectos elementares* identificados nos documentos, determinou a ênfase *trajetória curricular*. Essa ênfase é marcada pela elaboração de um instrumento gráfico multidimensional que evidencia e reflete aspectos conclusivos da análise do estudo: a *trajetória curricular* (figura V). Tal instrumento tem ainda o potencial de fazer emergir novas questões de investigação, apontando desdobramentos para este estudo. O caráter visual da *trajetória curricular* sintetiza e articula as análises correspondentes às três ênfases distinguidas, oferecendo um *panorama* que apresenta *aspectos elementares* e permite evidenciar *paridades e contrastes*. A *trajetória curricular* constitui um infográfico quadrimensional que relaciona: (i) a progressão dos anos escolares, registrada no eixo horizontal, (ii) os universos numéricos tratados (naturais, racionais e inteiros), distribuídos verticalmente e diferenciados por cores, (iii) *aspectos elementares* que emergiram da análise dos documentos, evidenciados na parte central do sistema cartesiano que sustenta a representação, e (iv) os países de referência, identificados a partir das respectivas bandeiras.

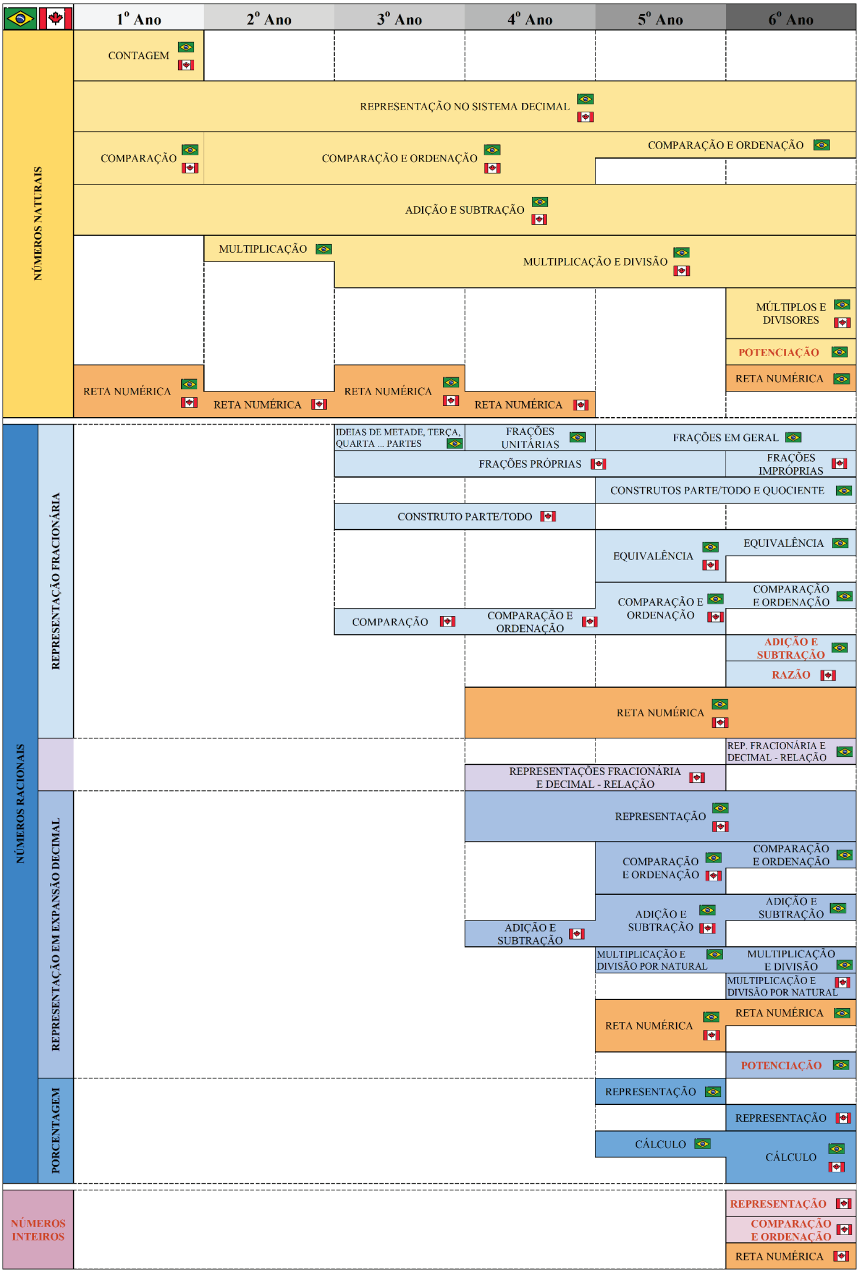


Figura V. *Trajetória Curricular* – Números, 1º ano ao 6º ano (Corrêa e Rangel, 2021, p. 4478, tradução nossa)

A visão panorâmica oferecida pela *trajetória curricular* permite observar a introdução e o desenvolvimento da abordagem de *aspectos elementares* identificados no estudo, ainda que não distinga questões particulares. Por exemplo, a partir do instrumento gráfico, observa-se que tanto a BNCC quanto a CCF propõem a abordagem das operações de adição e subtração de números naturais do 1º ao 6º ano de escolaridade. Identifica-se assim uma *paridade* entre os documentos analisados. No caso das operações de multiplicação e de divisão de números naturais, é possível observar que ambos os documentos curriculares abordam o assunto do 3º ao 6º ano de escolaridade, o que evidencia uma *paridade*. É possível observar também que o documento brasileiro propõe explorar a multiplicação de números naturais já no 2º ano, o que revela um *contraste*. A seção do infográfico correspondente a números racionais revela que ambos os documentos propõem o início da sua abordagem por frações e no 3º ano escolar. Uma *paridade* certamente. No entanto, a *trajetória curricular* evidencia que as orientações curriculares brasileiras determinam tal abordagem inicial a partir de frações unitárias (metade, terça parte e demais frações com numerador igual a 1), ao passo que o documento canadense não se restringe a essas frações, trata de frações próprias em geral (aquelas cujo numerador é menor do que o denominador). Um *contraste*.

A construção da *trajetória curricular*, que organiza resultados das ênfases *panorama*, *aspectos elementares* e *paridades e contrastes*, também exigiu análise. A organização dos números racionais a partir de frações, números decimais e porcentagem é um exemplo. A decisão de distribuir e categorizar os dados segundo tais assuntos foi uma necessidade que emergiu da própria construção da *trajetória curricular*. Nos documentos curriculares analisados, frações, representação decimal e porcentagem têm percursos próprios no desenvolvimento do conceito de número racional, ou seja, até que a abstração necessária seja alcançada. Tal separação permitiu observar que os dois países iniciam a abordagem por frações no 3º ano e também que ambos tratam inicialmente de representação dos racionais em expansão decimal no ano escolar seguinte. Por outro lado, o documento brasileiro propõe a abordagem de potenciação com números racionais em expansão decimal no 6º ano, o que sequer aparece no documento canadense. Além do mais, é possível identificar que a potenciação de números racionais em representação fracionária não é proposta no documento brasileiro até o 6º ano, o que está em consonância com o fato de a multiplicação de frações também não ser um objeto de estudo recomendado até tal ano escolar. Cabe observar que *contrastes* como o da abordagem de potenciação – um *aspecto elementar* identificado em apenas um dos documentos, é destacado na *trajetória curricular* em letras vermelhas. O mesmo recurso visual é utilizado, por exemplo, para destacar a representação, comparação e ordenação de números inteiros, *aspectos elementares* observados apenas no documento canadense.

A *trajetória curricular*, apesar de ter emergido como recurso necessário para sintetizar o estudo, revela limitação para evidenciar questões específicas. Por exemplo, para além do fato de tanto a BNCC como a CCF proporem a abordagem das operações de adição e subtração de números naturais do 1º ao 6º ano de escolaridade, tratado como *paridade*, a análise revelou *contrastes* e *paridades* que não são diretamente distinguidos na *trajetória curricular*. É esperado que os alunos e as alunas brasileiras alcancem, no 2º ano escolar, a habilidade de "[r]esolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo **números de até três ordens**, com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, utilizando estratégias pessoais" (Brasil, 2018, p.283, realce nosso). Já o documento canadense, para a mesma etapa escolar, espera que os estudantes possam "demonstrar entendimento de adições **(limitado a numerais de 1 e 2 dígitos) com respostas até 100** e das subtrações correspondentes" (Alberta Education, 2006, p. 65, realce nosso) (tabela IV). Os realces nas citações destacam um *contraste* não explícito na trajetória: a limitação do conjunto numérico. A *leitura combinada* dos documentos também revelou que ambos incentivam o cálculo mental, o que entendemos como uma *paridade* não explícita na trajetória.

Tabela IV. *Elementos Estruturantes* – Adição e Subtração de Números Naturais

BNCC – 2º Ano	CCF – 2º Ano
(EF02MA05) Construir fatos básicos da adição e subtração e utilizá-los no cálculo mental ou escrito. (EF02MA06) Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo **números de até três ordens**, com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, utilizando estratégias pessoais.	9) Demonstrar entendimento de adições **(limitado a numerais de 1 e 2 dígitos) com respostas até 100** e das subtrações correspondentes: • usando estratégias pessoais para adicionar e subtrair com e sem o apoio de material concreto, • criando e resolvendo problemas que envolvam adição e subtração, • usando a propriedade comutativa da adição (a ordem em que os números são adicionados não afeta a soma), • usando a propriedade associativa da adição (agrupar um conjunto de números de maneiras diferentes não afeta a soma), • explicando que a ordem em que os números são subtraídos pode afetar a diferença. 10) Aplicar estratégias de cálculo mental, tais como: • usar dobros, • compor uma dezena, • adicionar ou subtrair uma unidade, • adicionar ou subtrair duas unidades, • usar dobros conhecidos, • completar para subtrair para determinar fatos básicos de adição até 18 e fatos de subtração relacionados.

Fonte: BNCC (Brasil, 2018, p. 283, realce nosso) e CCF (Alberta Education, 2006, p. 65, tradução nossa, realce nosso).

Contrapondo a limitação descrita, entendemos que a *trajetória curricular* oferece reflexões pontuais importantes. Uma delas se refere à reta numérica, que é considerada como um *aspecto elementar* que perpassa os diferentes universos numéricos. A reta numérica é contínua e consistentemente abordada no documento canadense ao longo dos seis anos escolares analisados, sustentando a ampliação do universo numérico. Entendemos que tal consistência reforça a sua relevância na aprendizagem de números no contexto canadense. Já ao observar a dimensão referente ao documento brasileiro na *trajetória curricular*, nota-se que existe uma interrupção na recomendação de abordagem da reta numérica no 2º ano. Entendemos que a ausência da orientação explícita merece investigação: a reta numérica, intencionalmente ou não, pode não ser tratada neste ano escolar.

Extrapolando seu caráter conclusivo e limitações latentes, a *trajetória curricular* tem o potencial de suscitar questões e desdobramentos do estudo, como no trabalho mencionado anteriormente, Corrêa e Rangel (2021). Nesse estudo, as autoras problematizam a introdução do conceito de frações, amparadas pela observação de que a *trajetória curricular* sugere diferenças significativas nas abordagens iniciais de frações nos dois países, que se dá a partir do 3º ano escolar. A dimensão brasileira do recurso gráfico indica o tratamento de frações unitárias e em seguida de frações em geral. Já a dimensão canadense indica o início por frações próprias e na sequência impróprias; diferenciação essa que sequer é destacada no documento brasileiro. Em ambos os documentos, o construto parte/todo está fortemente associado ao ensino de frações. A análise da *trajetória curricular* revela que a BNCC propõe essa discussão no 5º ano, dois anos após o início do ensino das frações. Já a CCF traz o construto parte/todo no ano inicial do ensino de frações. Equivalência é certamente outro tema elementar na construção do conceito de frações. A *trajetória curricular* indica que as diretrizes curriculares dos dois países propõem a introdução do tema no 5º ano escolar e o associam à comparação e à ordenação de frações. Se destaca ainda a introdução das operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) envolvendo frações. A BNCC determina que a adição e a subtração sejam tratadas no 6º ano, enquanto a CCF não trata dessas operações no período analisado. Os dois documentos não propõem o ensino da multiplicação e divisão das frações no período considerado.

Outro aspecto que pode inspirar novas investigações é o início da abordagem de números naturais. A *trajetória curricular* revela que, em ambos os documentos, tal início se dá a partir de contagem, representação no sistema decimal, comparação, adição e subtração, e representação na reta numérica. Revela ainda que os três primeiros anos da escolaridade dos dois países são praticamente dedicados à abordagem de números naturais. No entanto, não revela particularidades dessas abordagens, como a proposta didática de valorizar a resolução de problemas, observada nos dois documentos, ou os algoritmos explorados para efetuar as operações. Acreditamos que particularidades como as destacadas podem ser alcançadas por refinamentos da *trajetória curricular*. Além disto, investigar e compreender os fundamentos por trás de abordagens distintas são formas potenciais de promover novas reflexões, estudos e aprofundamentos sobre o ensino de números naturais a partir da *trajetória curricular*.

Acreditamos que análises que evidenciem convergências e discrepâncias podem contribuir para a discussão sobre currículo no contexto da educação matemática, aprofundando questões como as elencadas e fomentando, inclusive, discussões didático-pedagógicas. Entendemos que a *trajetória curricular* permite "olhar através", buscando aprofundar demandas diversas que não ficam evidenciadas na leitura direta do infográfico nem são aqui investigadas. As questões não evidentes no infográfico são potencialmente visíveis na elaboração da *trajetória curricular*. Assim, a *trajetória curricular* revela-se valiosa tanto em sua forma final quanto no processo analítico que conduz à sua elaboração. Portanto, salientamos não só o potencial da *trajetória curricular* aqui apresentada, mas também a possibilidade de elaboração de refinamentos da *trajetória curricular* à luz da metodologia proposta.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com foco nos seis primeiros anos escolares, este estudo apresenta uma representação esquemática multidimensional sobre o ensino de números segundo orientações curriculares oficiais de matemática dos sistemas educacionais do Brasil e do Canadá – a *trajetória curricular*. A elaboração da *trajetória curricular* resulta de uma metodologia de análise relacional entre documentos curriculares: a *leitura combinada* (Corrêa e Rangel, 2024). Tal metodologia permite evidenciar a organização de sequências curriculares e apontar *paridades* e *contrastes* entre os documentos analisados. O processo se funda na identificação de *aspectos elementares* do conteúdo, observados nos *elementos estruturantes* das grades curriculares. A *trajetória curricular* é o instrumento gráfico que emerge do estudo, sendo parte e produto da análise.

A investigação de currículos escolares de matemática com base em documentos curriculares de diferentes países tem o potencial de promover a reflexão sobre os processos de ensino, oferecer subsídios para a prática docente e contribuir para o desenvolvimento do conhecimento próprio do professor, o conhecimento da matemática para o ensino (Ball et al, 2008). Entendemos que, a partir da *trajetória curricular* apresentada neste estudo, professoras e professores podem perceber aspectos relacionados ao ensino de números que não necessariamente seriam notados na leitura ou implementação direta de um currículo. Reconhecemos que, de acordo com Remillard (2005), "ainda há muito a aprender sobre se [o] uso de materiais curriculares não familiares pode ser visto como uma forma de desenvolvimento docente" (p. 239, tradução nossa).

Evoluções naturais e subsequentes da *trajetória curricular* incluem investigações das diferentes abordagens identificadas com o intuito de promover novas reflexões, estudos e aprofundamentos sobre o ensino de números, assistindo, assim, o desenvolvimento profissional de professoras e professores de matemática e a transformação do currículo pretendido em currículo implementado. Por fim, acreditamos que a investigação aqui apresentada oferece também uma contribuição substancial para iniciativas relacionadas à formação docente, inicial e continuada, a materiais didáticos, e mesmo a estudos análogos com foco em outros países ou em outras unidades temáticas de matemática (geometria, estatística e probabilidade, álgebra, grandezas e medidas).

REFERÊNCIAS

Acar, F., e Serçe, F. (2021). A comparative study of secondary mathematics curricula of Turkey, Estonia, Canada, and Singapore. *Journal of Pedagogical Research, 5*(1), 216-242. https://doi.org/10.33902/JPR.2021167798

Alberta Education. (2006). *The common curricular framework for K-9* m*athematics*. Alberta Education.

Artigue, M. (2018). Implementing curricular reforms: A systemic challenge. Em Y. Shimizu e R. Vithal (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth ICMI study school mathematics curriculum reforms: Challenges, changes and opportunities* (pp. 43-52). University of Tsukuba.

Ball, D., Thames, M. H., e Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bass, H. (2018). Quantities, numbers, number names and the real number line. In: M. Bartolini Bussi, e X. Sun (Eds.) *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades. New ICMI Study Series*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-63555-2_19

Bessot A., e Comiti C. (2006). Some comparative studies between French and Vietnamese curricula. Em F. K. S. Leung, K. D. Graf, e F. J. Lopez-Real (Eds), *Mathematics education in different cultural traditions – A comparative study of East Asia and the West. New ICMI Study Series* (Vol. 9, pp. 159–179). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-29723-5_10

Bickmore, K., Hayhoe, R., Manion, C., Mundy, K., e Read, R. (2017). *Comparative and international education issues for teachers* (Second edition.). Canadian Scholars.

Brasil. (2018). *Base nacional comum curricular.* Ministério da Educação.

Cerqueria, D. S., e Silva, M. N. da. (2020). Sistemas educacionais do Brasil, Chile e México: Análise dos currículos prescritos de Matemática. Ensino em Re-Vista, 27(3), 1005-1028. https://doi.org/10.14393/ER-v27n3a2020-10

Charalambous, C. Y., e Philippou, G. N. (2010). Teachers' concerns and efficacy beliefs about implementing a mathematics curriculum reform: Integrating two lines of inquiry. *Educational Studies in Mathematics, 75*(1), 1-21. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9238-5

Corrêa, P. D., e Rangel, L. (2021). The teaching of fractions – Emerging questions from the combined reading of Brazilian and Canadian curricular documents. *International Journal for Cross-Disciplinary Subjects in Education*, 12(2), 4473-4483. https://doi.org/10.20533/ijcdse.2042.6364.2021.0547

Corrêa, P. D., e Rangel, L. (2024). Combined Reading: A Methodological Approach for Documental Curricular Analysis. Em D. Thompson, M.A. Huntley, e C. Suurtamm (Eds.). *Lessons Learned from Research on Mathematics Curriculum. Research in Mathematics Education Series* (pp. 37-55). Information Age Publishing.

Kilpatrick, J. (2008). A Higher Standpoint. *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education* (ICME 11), 23-43.

Kilpatrick, J., Swafford, J., e Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Li, Y., e Lappan, G. (Eds.). (2014). *Mathematics curriculum in school education*. Springer.

Lui, K. W., e Leung, F. K. S. (2013). Curriculum traditions in Berlin and Hong Kong: A comparative case study of the implemented mathematics curriculum. *ZDM, 45*(1), 35-46. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0387-0

Macedo, E. (2006). Currículo: Política, cultura e poder. *Currículo sem Fronteiras*, *6*(2), 98-113.

Organisation for Economic Co-operation and Development. [OECD]. (2013). *PISA 2012 Assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy.* OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264190511-en

Pires, C. M. C. (2013). Pesquisas comparativas sobre organização e desenvolvimento curricular na área de educação matemática, em países da América Latina. *Educação Matemática Pesquisa*, *15*(2), 513-542.

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research*, *75*(2), 211–246. https://doi.org/10.3102/00346543075002211

Rojano, T., e Solares-Rojas, A. (2018). The mathematics curriculum design from an international perspective: Methodological elements for a comparative analysis. Em Y. Shimizu e R. Vithal (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth ICMI study School mathematics curriculum reforms: Challenges, changes and opportunities* (pp. 475-482). University of Tsukuba.

Schubring, G. (2014). A matemática elementar de um ponto de vista superior: Felix Klein e a sua atualidade. Em Roque, T.; Giraldo, V. (Eds.), *Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo* (pp. 39-54). Ciência Moderna.

Sharma, S. (2013). Qualitative approaches in mathematics education research: Challenges and possible solutions. *Education Journal, 2*(2), 50-57. https://doi.org/10.11648/j.edu.20130202.14

Shimizu, Y., e Vithal, R. (Eds.). (2018). *Proceedings of The Twenty-fourth ICMI Study School mathematics curriculum reforms: Challenges, changes and opportunities.* University of Tsukuba.

Simmt, E. (2018). Curriculum in Canada: A fractal interpretation using the case of Alberta. Em D. Thompson, M. Huntley e C. Suurtamm (Eds.). *International Perspectives on Mathematics Curriculum* (pp. 103-130). Information Age Publishing, Inc.

Son, J.-W., Watanabe, T., e Lo, J.-J. (2017). *What matters? Research trends in international comparative studies in mathematics education*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-51187-0

Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura. [UNESCO]. (2016). *Glossário de terminologia curricular*. International Bureau of Education.

Valverde, G., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., e Houang, R. T. (2002). Textbooks and educational opportunity. Em G. Valverde, L. J. Bianchi, R. G. Wolfe, W. H. Schmidt e R. T. Houang, *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks* (pp. 1-20). Springer Science + Business Media.

Villalobos Torres, E. M., e Trejo Sánchez, C. M. (2015). Fundamentos teórico-metodológicos para la educación comparada. Em M. A. Navarro Leal, e Z. Navarrete Cazales (Eds.), *Educación comparada: Internacional y nacional* (pp. 19-27). Plaza y Valdes Editores.

Wang, Y., e Fan, L. (2021). Investigating students' perceptions concerning textbook use in mathematics: A comparative study of secondary schools between Shanghai and England. *Journal of Curriculum Studies, 53*(5), 675-691. https://doi.org/10.1080/00220272.2021.1941265

Wang, Z., e McDougall, D. (2019). Curriculum matters: What we teach and what students gain. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(6), 1129-1149. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9915-x

Zanette, M. (2017). Qualitative research in the context of Education in Brazil. *Educar em Revista, 65*, 149-166. https://doi.org/10.1590/0104-4060.47454

Autor de correspondência

Priscila D. Corrêa

Endereço postal: University of Windsor, 401 Sunset Ave., Windsor
ON, Canada, N9B 3P4
priscila.correa@uwindsor.ca

 https://doi.org/10.24844/EM3603.02

La constitución de objetos mentales sobre la fracción impropia. Un experimento de diseño desde la Educación Matemática Realista

The constitution of mental objects about the improper fraction. A design experiment from Realistic Mathematics Education

Ivette Anel Delgado Valdez,[1] Luis Manuel Aguayo Rendón[2]

Resumen: En este trabajo se presentan los resultados de un experimento de diseño enmarcado en la Educación Matemática Realista, particularmente de una de las seis prácticas matemáticas de una Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE) en la que se considera a la fracción independiente de la unidad de referencia y cuyo objetivo específico es que los alumnos constituyan objetos mentales de la fracción impropia. Examinamos los medios didácticos que el docente despliega para que los alumnos comprendan que si $1/x$ se itera X veces, se crea una medida igual, menor o mayor que la unidad de referencia y la manera como los alumnos desarrollan simbolizaciones que les ayudan a comprender la notación convencional de la fracción. Los resultados evidencian que constituyen objetos mentales que les permiten interpretar las fracciones impropias mediante la matematización progresiva de las actividades planteadas en la tercera práctica.

Palabras clave: *tamaño relativo; iteración; fracción; medida.*

Fecha de recepción: 6 de marzo de 2024. **Fecha de aceptación:** 14 de octubre de 2024.

[1] Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Zacatecas – 321, 1975403012@alumnos.upn.mx, https://orcid.org/0009-0006-1514-114X.

[2] Universidad Pedagógica Nacional, Unidad Zacatecas – 321, laguayo@upn.mx, https://orcid.org/0000-0001-78977223.

Abstract: In this paper we present the results of a design experiment framed in Realistic Mathematics Education, particularly one of the six mathematical practices of a Domain Specific Teaching Theory (DST) in which the fraction is considered independent from the unit of reference and whose specific objective is the students to constitute mental objects of the improper fraction. We examine the didactic means that the teacher deploys so the students understand if 1/n is iterated X times, a measure equal to, less or greater than the unit of reference is created and how students develop symbolizations that help them to understand the fraction conventional notation. Results show how the students constitute mental objects, and how allow them to interpret improper fractions through the progressive mathematization of the activities proposed in the third practice.

Keywords: *relative size; iteration; fraction; measurement.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las fracciones en la educación básica reviste múltiples retos, uno de ellos es que los alumnos las consideren como números con propiedades diferentes a las de números naturales. Al enfrentar este reto se encuentran con diversos obstáculos epistemológicos (Brousseau, 1998) porque el cambio de un sistema a otro no es solo de un cambio de significado, las fracciones son nuevos objetos matemáticos con propiedades distintas. Por ejemplo, en los naturales el cinco es mayor que cuatro, pero en los fraccionarios 1/5 no es más grande que 1/4.

Aunado a estos obstáculos epistemológicos, durante años se ha privilegiado la enseñanza de las fracciones a través del modelo de Kieren (1980), en el cual se consideran números racionales, el significado parte-todo es el eje articulador de los demás significados (cociente, razón, medida, y operador) y se da prioridad a situaciones con cantidades continuas (partir un chocolate en partes iguales). Las dificultades crecen cuando se presenta la fracción como una mezcla de significados que son parte de un mismo concepto, como un mega concepto, esto provoca “una dispersión de casos que complejizan la construcción del concepto, sin aportes a su consolidación” (Pruzzo, 2012, p. 6), por lo que el significado de la fracción, en todas sus interpretaciones, se torna complejo.

Colocar el significado parte-todo como inicio de la enseñanza trae consigo consecuencias, "la equipartición orienta a los estudiantes a entender las fracciones en formas que dificultan el desarrollo de concepciones maduras de los números racionales" (Cortina *et al*, 2013, p. 7), "partir" un entero y tomar una parte solo permite comprender que las fracciones pueden ser menores (fracciones propias) o iguales que la unidad. En principio esto resulta conveniente para los alumnos porque su idea de fracción se relaciona con dividir algo en partes iguales y tomar una cantidad de esas partes, pero posteriormente genera dificultades para comprender a las fracciones mayores que el entero.

Diversas investigaciones (Fandiño, 2009) muestran que la equipartición como primer acercamiento a los números fraccionarios es un comienzo limitado que genera un aprendizaje pequeño, pobre y corto (Freudenthal, 1983) además estos acercamientos provocan que los alumnos piensen en las fracciones como algo contenido dentro de un entero, es decir, una parte que está dentro de un todo.

Otras investigaciones (Campo y Llinares, 2015) señalan que los alumnos interpretan fracciones unitarias y propias, pero tienen dificultades para interpretar las impropias. En diversas tareas que se les plantearon se observó que 93% dominaban las fracciones unitarias (identificaban la representación gráfica de 1/2, 1/4, etc.); 92.7% resolvió correctamente tareas relacionadas con las fracciones propias, pero solo 49.08% resolvió las tareas que involucraban fracciones impropias. Uno de los hallazgos más significativos es que para intentar resolver las tareas con fracciones impropias, los alumnos invertían el numerador y el denominador (convertían 5/3 en 3/5), porque consideraban que el denominador debía ser mayor.

También Cortina *et al.* (2012) encontraron que los estudiantes tenían dificultades para resolver tareas con fracciones impropias, uno de sus hallazgos señala que los estudiantes consideran que 8/9 es mayor que 5/4 porque contiene números que en los naturales son mayores. En otra tarea donde piden a los alumnos definir cuál fracción (11/7 y 7/11) es mayor y por qué, no son capaces de esgrimir justificaciones que evidencien una adecuada interpretación de las fracciones mayores a la unidad.

En otro estudio Tassavainen y Helenio (2024) encuentran que los niños tienen dificultades para distinguir la unidad de referencia de una fracción, regularmente solo identifican un objeto o el número uno como unidad, por ello suelen dibujar figuras con significado parte-todo pero les es difícil representar fracciones impropias como 7/5 porque en este caso la fracción tiene más partes que la unidad.

Algunas dificultades mencionadas tienen su origen en la naturaleza del modelo que inicia con el significado parte-todo, por esta razón en esta investigación se presenta un experimento de diseño basado en la Educación Matemática Realista (EMR) como alternativa para la introducción a la enseñanza de las fracciones, el propósito es que sean concebidas como números independientes de la unidad que pueden iterarse más allá de la unidad de referencia generando así mayores posibilidades de comprender la fracción impropia.

El objetivo de nuestra investigación es analizar los efectos que nuestro experimento de diseño tiene para la constitución de objetos mentales en torno a las fracciones impropias, considerándolo como un aporte relevante para la Educación Matemática porque plantea recursos didácticos para apoyar el aprendizaje de este objeto matemático.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA

La corriente didáctica conocida como Educación Matemática Realista (EMR) comenzó con una idea desarrollada por Hans Freudenthal en Holanda que buscaba transformar la enseñanza colocando en el centro la actividad matemática, es decir se trata de "reinventar las matemáticas" mediante la matematización del mundo real (Cobb *et al.*, 2008). Tres conceptos son fundamentales en esta teoría: fenomenología didáctica, matematización y normas sociomatemáticas. Estos conceptos guiaron el diseño de las actividades, pero también se tomó la noción de Teoría Hipotética de Aprendizaje para conjeturar nuestra Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE).

Fenomenología didáctica

Es un método para analizar diversas manifestaciones de objetos matemáticos en la realidad (fracciones, razones, etc.) y a partir de ese análisis construir la didáctica para su enseñanza. Desde esta noción se postula que para matematizar la realidad debe iniciarse por observar los fenómenos que requieren ser organizados y enseñar al estudiante a manipular los medios para organizarlos (Freudenthal, 1983), el objetivo es encontrar fenómenos (situaciones) que puedan ser organizados mediante un concepto matemático pero para encontrarlas es necesario realizar un análisis fenomenológico de un objeto matemático. En este análisis se articulan dos nociones fundamentales, el *nooumenon* que es el medio de organización, el que describe lo pensado, lo “inteligible”, el nombre que se le da a un objeto y; el *Phainomenon*, el fenómeno, la forma en que se expresa nuestra “experiencia matemática”, es lo que aparece, lo que se percibe, la cosa en sí (Puig, 1997).

En la EMR la conceptualización de los objetos matemáticos se contrapone con lo que Freudenthal (1983) llama *constitución de objetos mentales.* Un *objeto mental* es la descripción del campo semántico personal relacionado no con la totalidad de significados de un concepto, sino con un contexto específico de uso, por ello “se deberían buscar primero fenómenos que pudieran compeler al estudiante a constituir el objeto mental que está siendo matematizado por el concepto” (Freudenthal, 1983, p. 32). Los objetos mentales y los conceptos guardan una estrecha relación con los fenómenos, ambos actúan como medios de organización de los fenómenos.

La constitución de objetos mentales es el “conjunto de ideas” (Valenzuela *et al.*, 2019) que los alumnos crean al interactuar con situaciones vinculadas a los fenómenos que se intenta organizar mediante los conceptos. El *objeto mental* está en la mente de las personas, mientras que los conceptos se encuentran en la matemática como disciplina, “el objeto mental es el reflejo del concepto en la mente de las personas” (Puig, 1997, p. 75). Esto lo convierte en un objeto de enseñanza, pero al darle un giro con el análisis didáctico los objetos mentales se ligan con un contenido específico porque,

> ...el sistema quiere que los alumnos constituyan un objeto mental como medio de organización de esos fenómenos y que tengan acceso a los medios de organización que la historia nos ha legado (...), es decir, a los conceptos. (Puig, 1997, p. 81)

Matematización

Para relacionar los fenómenos con los medios de organización (objetos mentales y conceptos matemáticos), los alumnos utilizan sus conocimientos al organizar esos fenómenos, por ello deben realizar una actividad organizadora (matematización) que les brinda herramientas matemáticas para organizar y resolver una tarea, porque “matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos... incluida la matemática misma” (Freudenthal, 1973, p. 44).

La matematización está relacionada con la actividad de reinventar, cuando se matematiza la realidad se inicia con un proceso mediante el cual se formalizan las intuiciones informales (Cobb *et al.*, 2008), es decir, "lo que los seres humanos tienen que aprender no es la matemática como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas" (Freudenthal, 1983, p. 7). Esto significa que se pueden matematizar las situaciones de la realidad, pero también los objetos matemáticos. Estos dos objetos de matematización dan lugar a la matematización horizontal y vertical (Treffers, 1987), la primera implica convertir un problema de la vida real en uno matemático, la segunda es el momento en que se crean, recrean y manipulan los símbolos matemáticos.

Normas sociomatemáticas

Al analizar la interacción entre docente y alumno en el contexto de una fenomenología didáctica se pueden observar ciertas normas que rigen esa interacción ya que el proceso de enseñar no se da de manera casual, está regido por "obligaciones" no explícitas que se deben cumplir (D'Amore *et al.*, 2007). Son normas sociales que regulan la micro-cultura del aula y cuando el objeto a enseñar es matemático se puede hablar de normas sociomatemáticas.

Las normas sociomatemáticas son los aspectos normativos de la actividad matemática dentro del aula, donde la prioridad es buscar la matematización como práctica para crear creencias y valores matemáticos. El sentido de las normas sociomatemáticas puede apreciarse mejor si revisamos los principios de la EMR que orientan la actividad matemática en la enseñanza (Bressan *et al.*, 2004), en el caso de la implementación de la TEDE estas normas, a través de las conjeturas que se establecen en la THA, nos sirvieron para orientar el trabajo del docente.

Principio de Actividad. La educación matemática es una actividad humana y como tal se aprende haciéndola, en esta actividad lo fundamental no es aprender algoritmos sino el proceso de algoritmización; no es aprender álgebra sino la actividad de algebrizar; no es aprender las abstracciones sino la acción de abstraer (Freudenthal, 1991).

Principio de Realidad. Matematizar significa organizar la realidad para comprenderla, hablar de realidad significa que las matemáticas deben ser realizables, imaginables y razonables, "...yo prefiero aplicar el término realidad a lo que la experiencia del sentido común toma como real en cierto escenario" (Freudenthal, 1991, p. 17).

Principio de Reinvención. La reinvención es un proceso en el que el conocimiento matemático formal puede ser reconstruido para generar uno nuevo.

Principio de Niveles. La matematización sobre la realidad es progresiva (Treffers, 1987), va del conocimiento informal, al preformal y luego al formal. En este proceso los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión en sus estructuras cognitivas.

Principio de Interacción. Las matemáticas son una actividad social, por ello los estudiantes deben tener la oportunidad de "mostrar" sus estrategias e invenciones a otros (Santamaría, 2006).

Principio de Interconexión (estructuración). Existe una interrelación entre los contenidos matemáticos de varios ejes y unidades curriculares, por ello no pueden tratarse como entidades separadas, deben entrelazarse los contenidos de diversos ejes de aprendizaje en las situaciones problemáticas (Santamaría, 2006).

METODOLOGÍA

El presente trabajo se basa en la perspectiva metodológica del "Experimento de diseño" que nace bajo la influencia de Cobb *et al.* (2003), es una metodología de aprendizaje instruccional para investigar la relación entre teoría educativa, artefactos diseñados y la práctica.

> los experimentos de diseño permitirán que las expresiones, los gestos, las interacciones entre pares y profesor, los trabajos escritos y todas aquellas acciones que realiza el estudiante, puedan ser utilizadas para recolectar datos que en algunas ocasiones pasan desapercibidos. (Briceño y Buendía, 2015, p. 67)

En el experimento de diseño se estructura una Teoría Hipotética de Aprendizaje (THA) para promover el aprendizaje y una Teoría Conjeturada de Aprendizaje (TCA) que define lo que puede hacer el docente para alcanzar los objetivos de aprendizaje (Luna y Aguayo, 2021). Los experimentos de diseño se apoyan en el experimento de enseñanza, tipo de estudio más frecuente dentro de la metodología en que se inscribe este trabajo, básicamente un experimento de enseñanza es una secuencia de episodios en los que participa un investigador-docente, los alumnos y uno o varios investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000). Los experimentos de enseñanza buscan mejorar las prácticas, brindar herramientas a los docentes, hacer aportes a las teorías locales y aportar a las teorías generales. Constan de tres fases: 1) preparación del experimento; 2) experimentación para apoyar el aprendizaje y recolección de datos y; 3) análisis retrospectivo para reconocer la actividad del estudiante y el contexto en el que se desarrolló la actividad.

Empero, la implementación de un experimento de diseño no es un proceso que tenga fin, es cíclico y la planeación, ejecución y análisis siempre dan lugar a su rediseño que puede considerarse para ulteriores investigaciones en las que intervengan otras variables. Para la validación del desarrollo y resultados del diseño se utilizan dos tipos de análisis, el iterativo y el retrospectivo, el primero es una reflexión *in situ* que permite realizar ajustes pertinentes con la la agenda en el momento de su aplicación; el segundo se realiza después de la implementación del diseño para reconocer los alcances y limitaciones del diseño y del proceso de implementación. La experimentación recurrente y su perfeccionamiento producirán una Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE) que incluye los objetivos que guían el experimento de enseñanza y los medios didácticos para procurarlos.

La TEDE trata de teorías formuladas cuyo propósito es apoyar a los docentes en las tareas de enseñanza de un tema matemático específico (Gravemeijer, 1994, 2004). En estas teorías se propone una progresión de objetivos de aprendizaje y los medios didácticos para lograrlos, están empíricamente fundamentadas y son desarrolladas a través de un proceso conducido por conjeturas y de la instrumentación de experimentos de diseño en las aulas (Stephan *et al.*, 2003).

La TEDE que aquí nos ocupa es producto de un trabajo colaborativo entre un investigador-docente que la puso en escena en un grupo de quinto grado de la escuela primaria «República de Tanzania» del municipio de Iztacalco, Cd. de México, integrado por 31 alumnos (16 mujeres y 15 hombres) entre 11 y 12 años de edad. La TEDE se aplicó durante 26 sesiones de una hora y media que fueron videograbadas, consta de seis prácticas matemáticas, cada una propone formas de razonar claras, reflexivas, y apropiadas en la comunidad del aula. Posterior a la implementación, el investigador-observador realizó un análisis de las sesiones en las que se trabajó la tercera práctica matemática y parte de esos resultados se muestran en este trabajo.

La agenda matemática (tabla 1) describe la secuencia de actividades con la que se pretendió que los alumnos constituyeran objetos mentales sobre las fracciones. En correspondencia con el principio de realidad, las tareas se contextualizaron en una narrativa que cuenta la historia de los acajay, un pueblo que requería realizar mediciones para fabricar sus vasijas y para ello utilizaban el *Tije* (vara de aproximadamente 24 cm de largo) como unidad de medida y los *pequeños* de a dos, de a tres, de a cuatro, etc., como subunidades (figura 1).

Tabla 1. La TEDE para las fracciones

Práctica	Herramientas
1. Se interpreta un número entero como medida, que da cuenta de la acumulación de la longitud de una unidad. *Entender la medición como la iteración de una unidad.*	Tije, tiras de papel, tijeras
2. Se reconoce y compara el tamaño relativo de una subunidad de medida. *Comparar fracciones unitarias*	Tije, cilindros de papel, tijeras
3. Se interpretan las fracciones como medidas que resultan de iterar una subunidad de medida y se comparan las medidas con el tamaño de la unidad. *Determinar cuándo una fracción es mayor, menor o igual a una unidad*	Tije, cilindros de papel, tiras de papel, tijeras
4. Se interpretan las fracciones como medidas menores, mayores o iguales a medidas realizadas iterando la unidad. *Determinar cuándo una fracción es mayor, menor o igual a la iteración de la unidad dos o más veces*	Tije, cilindros de papel, tiras de papel, tijeras, recta numérica
5. Se interpretan las fracciones como medidas susceptibles de producir otras medidas al ser iteradas cierto número de veces. *Multiplicar una fracción por un número entero*	Recta numérica
6. Se interpretan las fracciones como medidas de longitud menores, iguales o mayores a un medio. *Establecer igualdades y desigualdades con un medio*	Recta numérica

El desarrollo de las seis prácticas permite que el alumno comprenda a la fracción como un número capaz de cuantificar, desde la primera y segunda práctica crearon objetos mentales para reconocer la fracción unitaria y determinar cuál es mayor o menor. En este trabajo se presenta el análisis de la tercera práctica, con esta se buscaba que los alumnos interpretaran la fracción como medida de longitud mediante la iteración de una subunidad y como algo que puede ser menor, igual o mayor que la unidad de referencia, lo cual contribuye a la constitución del objeto mental sobre la fracción impropia.

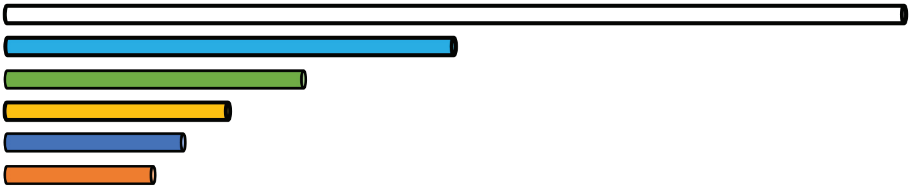


Figura 1. El *Tije* y los *pequeños* de *2,3,4,5* y *6*

Nota. El *Tije* está en blanco El *pequeño* de a dos (azul) mide 1/2 del *Tije* y necesita iterarse dos veces para ser igual que él. El *pequeño* de tres (verde) mide 1/3 del *Tije* y necesita iterarse tres veces para ser igual que él. Este modelo ha sido utilizado en investigaciones anteriores como en Cortina, (2014).

RESULTADOS. LA REINVENCIÓN DE LA FRACCIÓN IMPROPIA

En las dos primeras prácticas el objetivo era que los alumnos reconocieran la fracción como un sistema de cuantificación racional, es decir como una medida y no como parte contenida en un entero. En la primera reconocieron algunas propiedades de la medición como la iteración y la exactitud, en la segunda identificaron el tamaño relativo de las subunidades respecto de la unidad de referencia, es decir identificaron fracciones unitarias por su tamaño relativo como resultado de multiplicar la subunidad por un número entero. Por ejemplo que un *Tije* es dos veces la subunidad llamada *pequeño* de a dos, la mitad de un *Tije* (1/2).

En la tercera práctica, cuyos resultados se presentan en este trabajo, se pretende que los alumnos constituyan objetos mentales para comprender que la subunidad puede ser una medida o un número independiente de la unidad y que al ser iterada tantas veces como sea necesario se obtiene un resultado proporcional entre la iteración y el tamaño. La práctica comienza con la iteración de una subunidad y la determinación del resultado de dicha iteración, por ejemplo si se itera tres veces el *pequeño* de dos se obtendrá la medida 3/2. Esta iteración permitirá a los alumnos comparar el tamaño relativo de la fracción en relación con la unidad de referencia y obtener un resultado legítimamente razonable para las fracciones impropias (Cortina y Zúñiga, 2008), porque habrán interpretado a la fracción en términos multiplicativos y no como algo que cuantifica bajo el criterio partitivo.

Los resultados de esta tercera práctica se presentan en tres momentos: los objetos mentales constituidos acerca de las fracciones impropias cuando se les pide identificar una medida mayor a la unidad de referencia; la simbolización mediante la que representan las fracciones impropias y; la comparación de fracciones para determinar y justificar cuál es menor, igual o mayor a la unidad.

Con la tercera práctica se busca modificar el esquema partitivo que considera a la fracción como contenida en un entero que dividido en tantas partes e identifica una fracción al sumar equis partes del todo dividido (Thompson & Saldanha, 2003). Para modificarlo resulta necesario introducir las nociones de numerador y denominador porque la relación entre ambos indica el tamaño del *pequeño* y el número de veces que la subunidad fue iterada, el denominador representa el tamaño de la subunidad y el numerador las veces que esta fue iterada (Delgado y Cortina, 2021).

Para continuar, se propone a los alumnos medir una tira (figura 2) que será utilizada por *los acajay* como símbolo de pertenencia a la comunidad, para replicarla las veces que sea necesario deben conocer su tamaño con exactitud

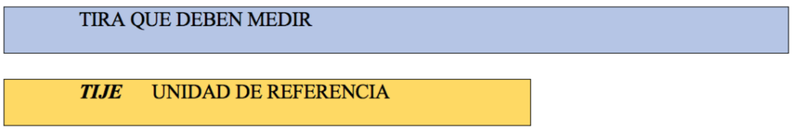


Figura 2. Tiras de papel

Nota. La tira de papel debe medirse con el Tije y con los pequeños.

Al iniciar la matematización horizontal, los alumnos buscan estrategias para determinar el tamaño de la tira, lo que implica interpretar la fracción impropia como una medida mayor que la unidad. Una de las estrategias se basa en las fracciones mixtas porque usan el *Tije* y uno de los *pequeños* para determinar la medida, sin embargo, como se aprecia en el siguiente fragmento en el que se usaron nombres ficticios para los alumnos y la letra M para designar al maestro, no todos los alumnos seleccionan la misma subunidad (*pequeño),* por ello el maestro reorienta el proceso de reinvención para que en la conversación colectiva los alumnos se focalicen en la iteración del mismo *pequeño,* con ello el maestro busca que constituyan objetos mentales sobre las fracciones impropias. Cabe aclarar que en prácticas anteriores se había incluido la notación $\boxed{2}$ para representar al “pequeño de a dos” o la *subunidad 2* cuya longitud es 1/2 de la longitud de la unidad, esta notación permite interpretar al denominador dentro de los números fraccionarios (el tamaño de la fracción unitaria).

M:	Dominic, (señala la tira), tú hiciste otra, ¿cómo lo escribiste?, Ana Corina pásale, vamos a ver cómo lo escribió Ana Corina.
Ana Corina:	Un *Tije* y un $\boxed{2}$
M:	Denisse ¿qué querrá decir eso que escribió?
Denisse:	Quiere decir un *Tije* y un *pequeño* de a dos.
M:	Fíjense, cuando *los acajay* empezaron a medir con los *Tijes*, se dieron cuenta que no era buena idea combinarlos, lo mejor era usar uno solo, el *Tije* o uno de los *pequeños*, ¿se podrá medir con el mismo toda la tira?
Alumnos:	Sí.
M:	Vuélvanlo a medir usando un solo *Tije*, el que ustedes quieran.

Como se puede observar, el docente se percata que han entendido la consigna pero que sus acciones los alejan del objetivo, no utilizan una misma subunidad para medir y ello obstaculizaría la organización de la conversación colectiva. En el proceso de reinvención guiada es indispensable que el docente asuma su rol de guía y lleve a los alumnos a la construcción de la noción de fracción impropia sin evadir la realidad que están matematizando. Por ello redirecciona su actividad, para situarlos en el contexto de los acajay les pide que utilicen la misma subunidad, para que comprendan que las fracciones pueden ser iteradas incluso más allá de la unidad.

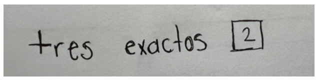
Matematización progresiva. La simbolización de la fracción impropia

En esta tercera práctica los alumnos han recreado la noción de fracción impropia mediante las iteraciones de las subunidades e iteraciones (con las tiras). Sin embargo, en la TEDE también se propone incluir la simbologías de manera contextualizada, es decir que estén implícitas en la actividad para que se comprenda la notación sin que parezca absurdo que el numerador sea mayor que el denominador por ejemplo 3/2. Se busca que los alumnos generen nociones sobre la relación entre numerador y denominador al pedirles que representen el número de iteraciones realizadas al medir con un *pequeño*.

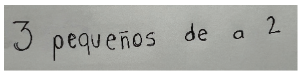
En esta búsqueda, las herramientas y la simbología resultan de suma importancia porque ayudan a los alumnos a reinventar el objeto matemático y como mencionan Gravemeijer y Stephan (2003), la aparición de estos recursos debe darse de forma gradual y en apoyo a la matematización que los alumnos realizan. Por esto, las nuevas situaciones que se les planteen deben articularse con la actividad anterior (medir tiras) y ofrecer una solución a lo que se intenta resolver.

Como hemos referido, los alumnos deben enfrentarse con situaciones que los orienten a construir el significado del numerador y el denominador a través de la iteración de las subunidades; para ello en un primer momento deben apropiarse de una escritura que dé cuenta del tamaño del *pequeño* que utilizan para medir. Sin embargo, la notación $\boxed{2}$ solamente representa el tamaño del *pequeño* pero no el número de iteraciones necesarias para medir la longitud. Por ello durante la conversación colectiva cuando justifican las estrategias utilizadas, el docente analiza los sistemas de escritura empleados por los alumnos para que ellos mismos puedan determinar cuáles resultan más eficaces como medio de representación.

M: Escribe aquí arriba para que todos vean (señala el pizarrón), fíjense cómo apuntó Nohemí.
Noemí: (Escribe en el pizarrón)



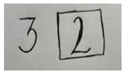
M: ¿Qué habrá querido decir Noemí con eso?
Ao: Hay tres, tres exactos.
Carmen: (Escribe en el pizarrón "3 pequeños de a 2")



M: ¿Midieron lo mismo... Carmen y Noemí?
Alumnos: Sí.
M: Sí, ¿verdad? ¿Pero, qué diferencia hay?
Ao: Otra explicación.
M: Ahorita vemos, espérame... ¿Qué diferencia hay Fabiola?
Fabiola: No lo escribieron igual.
M: ¿Cuál es una diferencia importante en cómo lo escribieron?
Ao: (Levanta la mano)
M: Fíjense, ¿Noemí escribió "*pequeño* de a dos"?
Alumnos: No...
M: ¿No?... ¿No escribió "*pequeño* de a dos"?
Aa: Sí, pero de otra forma.

En el fragmento se puede observar, como lo plantea Cobb (2003), que el maestro debe esperar que los alumnos emitan respuestas encaminadas a cumplir los objetivos de la práctica, en este caso su intención es que los alumnos reconozcan el símbolo y su significado (la relación entre iteración y subunidad utilizada). Sobre dicha relación, los alumnos han expuesto algunas estrategias que utilizaron para encontrar la medida de las tiras, pero es a través del análisis colectivo que comienzan a tomar sentido y acercan al alumno a la escritura que la TEDE se propone generar. El docente elige una de las representaciones para que se analice su viabilidad.

M:	Fíjense cómo le hizo Ana Corina...



M:	Xiomara, fíjate como lo escribió Ana Corina
M:	Dile, "compañera Ana Corina..."
Román:	Compañera Ana Corina, ¿qué significa?
Ana Corina:	Tres es...
M:	Muy buena pregunta, vamos a escuchar a todos.
Ana Corina:	Bueno, el tres es el número que se hace y el *pequeño* de a dos el que se ocupó.
M:	Explícanos como si estuvieras midiéndolo (le entrega el pequeño azul)
Ana Corina:	Una, dos, tres... (mide la tira con el *pequeño* de dos iterando tres veces)

La justificación de Ana Corina responde, como dice Cobb (2003), a un discurso de tipo conceptual que da respuesta a los métodos empleados. El símbolo que utiliza es capaz de explicar que el número fuera de la casilla representa las veces que ha sido iterado el *pequeño*, su tamaño está representado por el número dentro del recuadro. Desplegar este discurso en una conversación colectiva permite al resto de los alumnos matematizar la idea y usarla para comprender el significado del numerador y el denominador en relación con la escritura que se propone emplear, la cual se describe más adelante.

Al realizar la medición con el *pequeño* de a dos, Ana Corina muestra las iteraciones realizadas para determinar el tamaño de la tira de papel, esto permite a sus compañeros acercarse al significado de la simbología empleada. Este momento resulta crucial para el desarrollo de la agenda, ya que mediante esta conversación colectiva los alumnos están más cerca de la reinvención de las fracciones (propias e impropias) y de la notación convencional. Como se ha visto, los principios de realidad y reinvención guiada juegan un papel importante para la matematización de los alumnos porque los llevan a concebir la fracción como una medida independiente de la unidad de referencia.

Para el docente resulta importante que los alumnos reconozcan el numerador como parte de los símbolos que dan cuenta del tamaño relativo de una fracción, pues están estrechamente vinculados con una relación multiplicativa que nace de la iteración, sobre ese respecto Thompson y Saldanha (2003) mencionan que es necesario que los alumnos consideren a la fracción con propiedades multiplicativas y no sumativas, puesto que la fracción tiene sus raíces en las nociones proporcionales que implican X número de veces la unidad, en este caso los *pequeños*.

Cuando a través de la iteración, los alumnos relacionan las propiedades multiplicativas de la fracción con el símbolo que representan, reconocen la longitud medida, por ejemplo que para tener 3/2 la subunidad de 1/2 ha sido iterada tres veces. Como lo menciona Gravemeijer (2003), el maestro instaura una idea para que los alumnos se apropian de ella y simplifiquen su escritura, eso significa que mediante la matematización que realizan, los alumnos se acercan más a las ideas matemáticas. A través de este proceso el maestro propone una forma no convencional de representar el número de veces que ha sido iterado un *pequeño* para determinar una longitud (figura 3), que resulta significativa para los alumnos porque no la consideran arbitraria y sin sentido, sino un elemento que les ayuda como eventuales *acajay*.

$$\begin{array}{c}\mathbf{7}\\ \boxed{5}\end{array}$$

Figura 3. Representación no convencional de la fracción

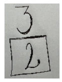
Nota. Indica que la subunidad 5 (cuya longitud es 1/5 de la unidad) fue reiterada siete veces.

El trabajo con esta simbología facilita a los alumnos comprender lo que es una fracción impropia y la relación que guarda con su tamaño, porque la razón de que el numerador sea más grande que el denominador corresponde a la lógica multiplicativa de iteración y no sumativa de partición.

M: Oigan, me emocioné mucho cuando vi que escribían los *pequeños* así, porque se parece muchísimo a como lo hacían los *acajay*.

Ao: Es que ya vivíamos antes.

M: Ya vivían antes ustedes, yo creo que sí, porque se parece muchísimo a como escribían estas medidas los *acajay*, también ponían el tamaño del *pequeño*, pero ¿qué creen?, este no lo ponían aquí (señala el número tres de “3 $\boxed{2}$ ”), lo ponían aquí (escribe de nuevo en el pizarrón) miren…



Aos: Oh…Oh…

M: Entonces, ¿ahí qué dice?

Alumnosos: El *pequeño* de a dos …

Lucas: El *pequeño* de a dos tres veces

M: ¿Lucas?… Dice lo mismo, dice tres *pequeños* de a dos, tres veces…

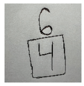
Aos: El *pequeño* de a dos

Como se ha podido observar, en el desarrollo de las actividades los alumnos han pasado por una matematización progresiva, esto es, por un proceso que organiza la realidad mediante el movimiento dialéctico entre la matematización horizontal y vertical, proceso que primero les permitió comprender el tamaño de una subunidad (fracciones unitarias), además fueron capaces de determinar cuál es más grande y por qué. Sobre este respecto Santamaría (2016) menciona que una actividad en un nivel está sometida a análisis en otro nivel, es decir, cuando se matematiza la realidad y ha pasado a formar parte de las ideas matemáticas, son estas las que ahora se deben matematizar para generar nuevos conocimientos en torno al objeto con el que se está trabajando. Se trata de tomar una situación matemática y elevarla a un nivel más alto de abstracción logrando mayores niveles de formalización matemática (en relación con los puntos de partida de los estudiantes).

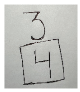
En este proceso de matematización progresiva, el maestro reconoce las aportaciones de cada uno de los alumnos en tanto eventuales *acajay*, de esta manera el símbolo que representa el tamaño relativo de la fracción y que se relaciona con el número de veces que un *pequeño* ha sido iterado es comprendido y aceptado por los alumnos. Como es introducido de manera adecuada lo consideran útil puesto que ha sido construido con sus propias aportaciones articulándolas con las que desarrollaron los *acajay*, de esta manera el maestro les ha dado la oportunidad de recrear y reinventar la noción de fracción y su simbología, por ello cuando les pide que expliquen lo que significa logran hacerlo sin dificultad y encuentran la relación entre el número fuera de la casilla (numerador) y el que está dentro de la casilla (denominador).

Para seguir guiando la reinvención y consolidando la utilización de la notación, el maestro plantea actividades donde es necesario emplear la escritura acordada para simbolizar la relación entre iteración y *pequeño*. La intención es que los alumnos se apropien de dicha escritura y puedan usar un discurso conceptual para explicar lo que representa y la razón por la que se usa ese símbolo.

M: ¿Cómo escribirían…seis veces el *pequeño* de a cuatro?
Denisse: (Escribe en el pizarrón)



M: ¿Sí? ¿Quién no está de acuerdo?
Aos: (Nadie contesta)
M: ¿Sí está bien verdad?… Ahora que pase Daniela, ¿cómo escribirían… tres veces el *pequeño* de a cuatro?
Daniela: (Pasa al pizarrón y escribe)



M: Tres veces el *pequeño* de a cuatro. ¿Está bien? ¿Tres veces el *pequeño* de a cuatro?
Aos: Sí.

En el fragmento anterior se observa que los alumnos han normalizado las ideas de fracción propia e impropia y que su escritura representa adecuadamente la relación entre iteraciones y fracción unitaria. El objetivo principal, como lo mencionó Steffe (2002), es que los alumnos se apropien de la idea de que una subunidad puede ser iterada tantas veces como sea necesario, incluso más allá de la unidad de referencia. Además, en esta parte de la TEDE pueden comparar el tamaño de la fracción y determinar si es igual, menor o mayor a la unidad de referencia (el Tije).

Para trabajar y desarrollar dichas nociones en el contexto de la narrativa de los *acajay*, el maestro propone a los alumnos que elaboren listones de diversas medidas (figura 4), las cuales servirán para determinar qué fracciones son menores, iguales o mayores que la unidad de referencia (*Tije*). Lo que se pretende es que los alumnos estructuren discursos conceptuales que les permitan explicar y validar cómo se puede determinar la medida de una fracción en comparación con otras.

1 Tije	$\frac{4}{\boxed{3}}$	$\frac{5}{\boxed{6}}$	$\frac{2}{\boxed{2}}$	$\frac{6}{\boxed{5}}$

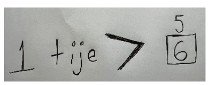
Figura 4. *Tamaño de tiras que se deben elaborar*

COMPARACIÓN DE FRACCIONES

Con el desarrollo de esta actividad (elaborar listones de diversos tamaños) se pretende que los alumnos interioricen la idea de que una fracción es un número que puede servir para cuantificar y que su tamaño puede ser menor, igual o mayor a la unidad de referencia. Sobre este respecto Freudenthal (1983) señala que la comparación y descripción de objetos son fenómenos de las fracciones que pueden considerarse ideales para la enseñanza, ya que estos se asocian con la fracción como comparador en un primer nivel de abstracción.

Reinventar las fracciones en términos multiplicativos significa entonces que los alumnos deben reestructurar sus esquemas acerca de lo que significa el numerador y el denominador, que rompan con la idea de la fracción como parte de un todo y la comprendan considerando el número de iteraciones necesarias de una subunidad (sin restricciones) para medir una longitud. En este momento de la TEDE los discursos de los alumnos incorporan una nueva definición, lo que nos permite analizar si los objetivos que se plantearon se alcanzan mediante la matematizacion progresiva.

M: ¿Cuál será más grande, cinco veces el *pequeño* de a seis o un *Tije*?
Xiomara: (Pasa al pizarrón y escribe)



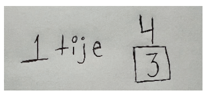
M: Todos estamos aprendiendo a explicarnos, no tiene nada de malo explicarlo así. Xiomara va a hacer un gran esfuerzo para explicarse y no hay nada malo…
Xiomara: Es que el *pequeño* de a seis, si lo medimos cinco veces en el *Tije* va a quedar más chiquito, pero si fueran seis, quedaría igual que el *Tije*, porque es el *pequeño* de a seis y por eso el *Tije* es más grande que el *pequeño* de a seis si lo medimos cinco veces.

La justificación de Xiomara nos permite apreciar que a través de la iteración se puede comprender que una fracción es menor a la unidad porque el número de veces que se repite el *pequeño* no corresponde al inverso multiplicativo de la unidad. Cuando menciona que "queda más chiquito porque se mide cinco veces y no seis y por ello no iguala el tamaño del *Tije*" significa que las ideas multiplicativas están presentes y que con ellas los alumnos pueden determinar el tamaño de una fracción en relación con las veces que se ha iterado (Tzur, 2002). Asimismo, podemos observar la presencia del inverso multiplicativo cuando el alumno es capaz de reconocer que seis veces el *pequeño* de seis es la misma medida que un *Tije* y deduce que el *pequeño* de seis es 1/6 del Tije.

Otro aspecto importante que destacar es que los alumnos utilizan la unidad como punto de referencia, "si fueran seis quedaría igual que el *Tije*"; este tipo de argumentos evidencian el saber que tienen sobre las fracciones y que ya no las conciben como partes contenidas en el entero, sino que cada medida es independiente de la unidad y dan cuenta de un tamaño diferente.

En el sentido de la idea anterior, cuando los alumnos reflexionan sobre una medida menor al *Tije* es necesario también que generen discursos sobre las medidas que pudieran resultar mayores a este, para ello el docente propone otra comparación.

M: Esta es una pregunta bien difícil de acajay, es una pregunta clave así que necesito toda su atención, ¿listo Jaime?... Vamos a pensar, no vamos a contestar... ¿Cuál tira nos habrá salido más larga? (señala)



Aos: (Algunos levantan la mano)

M: Fíjense, ¿una medía...? (señala el pizarrón)

Aa: Un Tije...

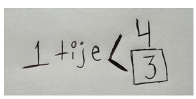
M: ¿Y la otra medía...? (señala en el pizarrón)

Aos: Cuatro veces el *pequeño* de a tres.

M: Entonces, piensen ¿cuál habrá salido más larga?

M: Sofía, pásale, vamos a ver si están de acuerdo o no. Vamos a usar la boca del pacman (se refiere al signo mayor que).

Sofía: (Pasa al frente y escribe en el pizarrón)



En el fragmento anterior podemos observar dos detalles: el primero tiene que ver con la manera como los alumnos se refieren a la fracción 4/3 en términos multiplicativos, pues exponen su tamaño en relación a la cantidad de veces que ha sido iterado un *pequeño*, "cuatro veces el pequeño de a tres", como menciona Cortina y Zúñiga (2008) esta idea es fundamental para que las fracciones impropias puedan comprenderse desde un contexto que no se circunscriba a la percepción de la fracción contenida dentro de una unidad. Un segundo detalle tiene que ver con el hecho de que ya son capaces de identificar el tamaño de una fracción y compararla, en este caso con un entero. En este sentido observamos que reconocen la iteración de cuatro veces el *pequeño* de tres como algo mayor al *Tije*.

En la misma comparación se espera que, además de identificar cuál fracción es mayor, los alumnos justifiquen dicha comparación y la expresen mediante un discurso que dé cuenta de su capacidad para identificar cuándo una fracción es mayor a la otra y por qué:

Sofía: Que el *Tije* es más chico, porque este (señala la notación que representa cuatro iteraciones de tres) ocupa más espacio, si aquí dijera tres (escribe "3") sería igual que el *Tije*, aquí es más grande porque aquí se le aumenta uno (escribe "1") al lado de la notación.

El discurso de Sofía evidencia que interpreta las fracciones como algo que puede ser iterado más allá de la unidad de referencia. Cuando Sofía expresa que "si dijera 3/3 sería del mismo tamaño, pero como tiene una más (iteración), 4/3 es mayor", está poniendo de manifiesto que comprende que el número de iteraciones de las subunidades determinan su tamaño y de igual manera, comprende el valor recíproco de tamaño relativo (donde A es tres veces B, por lo tanto, B es 1/3 de A) y es capaz de determinar la equivalencia entre el *Tije* y el número de iteraciones del *pequeño* de tres para usarlo como referencia en la comparación.

Este tipo de discurso nos permite apreciar que los alumnos son capaces de justificar el tamaño de una fracción y formular argumentos que dan cuenta de ello. Para lograr esto ha sido importante la acción del docente, pues está relacionada con lo que Cobb (2003) señala respecto de los discursos que los alumnos emplean, menciona que cuando utilizan discursos conceptuales de este tipo proporcionan al resto de la clase recursos que les permiten reorganizar su pensamiento y, además, son de suma importancia para la clase en general porque permiten seguir avanzando en las prácticas. La relevancia del principio de interacción se hace evidente cuando exponen sus resultados y conjeturas al comparar fracciones, por esta razón las conversaciones colectivas son fundamentales en la clase por lo que a los alumnos pueden ofrecer.

Como hemos puesto en evidencia, en la tercera práctica han aparecido las estrategias de los alumnos para comparar y al exponerlas el maestro las toma como un recurso para organizar una conversación colectiva en la que se reflexione sobre ellas, de esa manera puede tomar las respuestas de los alumnos y convertirlas en herramientas conceptuales que pueden emplear posteriormente.

Recordemos que en el inicio de la TEDE, los alumnos trabajaron con situaciones que les ayudaron a comprender el tamaño de una fracción unitaria cuando las comparan entre sí. Ese tipo de situaciones presentan un obstáculo epistemológico porque, aunque trabajan con fracciones las relacionan con lo que saben acerca de los números naturales. Dicho obstáculo aparece por ejemplo cuando se les pide determinar si 1/5 es mayor a 1/7, en este caso los alumnos podrían argumentar que 1/7 es mayor porque el 7 es más grande. Es por esa dificultad que al desarrollar la TEDE se busca que construyan nociones acerca del número fraccionario, para ello deberán reconocer la relación recíproca de tamaño relativo que una fracción guarda respecto de la unidad de referencia (Thompson y Saldanha, 2003). Estas ideas permitirán al alumno reconocer el tamaño de las fracciones en referencia a la unidad establecida, además de favorecer la concepción de las fracciones como algo externo a la misma unidad.

Para cerrar esta fase de la TEDE, el profesor plantea a los alumnos varias tareas por escrito en las que también deben dar su respuesta por escrito, se refieren a la comparación de fracciones. Si bien pueden parecer sencillas cuando los alumnos ya comprenden el valor relativo de la fracción, lo que aquí interesa es analizar la abstracción que han alcanzado para validar sus respuestas, se trata de que los alumnos encuentren un argumento que justifique por qué una fracción es menor o mayor que otra.

La primera cuestión planteada fue “¿por qué 9/10 es menor que 10/9?”, en las respuestas es posible observar que han consolidado el aprendizaje de esta noción y como se puede ver en la siguiente respuesta de un alumno que hemos transcrito, son capaces de determinar y justificar cuándo una fracción es mayor a la otra.

(A) $\dfrac{9}{\boxed{10}} < \dfrac{10}{\boxed{9}}$

La medida de $\frac{9}{\boxed{10}}$ *es menor que la medida de* $\frac{10}{\boxed{9}}$ *porque* $\frac{9}{\boxed{10}}$ *es más pequeño porque debe caber 10 veces, pero en este caso solamente tiene 9 veces y le faltaría una para ser un Tije y a* $\frac{10}{\boxed{9}}$ *le sobraría uno porque durante más pequeño el número, más espacio ocupa y un número más grande menos espacio ocupa.*

Se puede apreciar que los alumnos han comprendido el valor recíproco de tamaño relativo de una fracción y que, con este aprendizaje, son capaces de justificar la comparación de fracciones: "porque entre más pequeño el número más espacio ocupa y entre más grande menos espacio ocupa". El argumento utilizado remite a la idea de iteración, es decir a las veces que un *pequeño* puede ser iterado para igualar el tamaño de la unidad, entre menor sea el *pequeño* más iteraciones requiere para medir lo mismo que la unidad. Podemos decir entonces que el tamaño relativo de la fracción unitaria permite a los alumnos comparar con éxito fracciones. El argumento se complementa cuando menciona que "$\overset{9}{\boxed{10}}$ es más pequeño porque debería caber 10 veces y aquí solamente tiene 9", lo que es evidencia de que el alumno no solo es capaz de determinar que 1/10 es menor que 1/9 sino también que, para justificar su respuesta, utiliza la noción de inverso multiplicativo, por ello puede darse cuenta que $\overset{9}{\boxed{10}}$ no son suficientes para igualar el tamaño del *Tije*, mientras que $\overset{10}{\boxed{9}}$ lo sobrepasa por una iteración o por un *pequeño*, es decir que fue iterado más allá de la unidad de referencia.

Al observar estos argumentos y la comparación que son capaces de hacer los alumnos, se hace evidente que pueden constituir objetos mentales sobre la fracción impropia si desde los primeros acercamientos a la fracción se le plantea como un número independiente de la unidad y que su tamaño, iteraciones y medida final, no están contenidas dentro del entero. Otra de las ideas necesarias para comprender la fracción impropia tiene que ver con reconocer su propiedad multiplicativa, la cual permite determinar que una subunidad puede ser iterada las veces necesarias para obtener una medida, incluso más allá de la unidad de referencia. En la siguiente respuesta que también hemos transcrito, se puede observar que el alumno comprende que el tamaño de la fracción está determinado por el número de veces que tienen que usar un *pequeño* para medir (iterar).

(A) $\overset{9}{\boxed{10}} < \overset{10}{\boxed{9}}$

La medida de $\overset{9}{\boxed{10}}$ es menor que la medida $\overset{10}{\boxed{9}}$ porque el pequeño de a diez debe de usarse diez veces para ser como un Tije y el pequeño de a nueve debe de caber nueve veces, pero como es 10 veces, es más grande la medida de $\overset{10}{\boxed{9}}$

En el argumento anterior se puede apreciar que el alumno comprende que "si A es 9 veces B, entonces B es 1/9 de A", lo que le permite expresar que el 9 (que alude a 1/9) debe "caber" nueve veces para ser igual que un *Tije*, pero como cabe 10 veces es más grande. Esta idea le permite comprender que para comparar fracciones debe revisar si se iguala o no la unidad de referencia. También le permite pensar en la fracción desde una perspectiva multiplicativa. En este sentido el esquema fraccionario iterativo que propone Tzur (2002) ayuda a los alumnos a abandonar la idea de que la fracción está contenida en un entero, también los ayuda a establecer las ideas necesarias para comprenderla como un número que expresa un tamaño que puede ser acumulado e iterado más allá de la unidad de referencia.

En el campo de las fracciones, la relación multiplicativa es una de las nociones que Tzur (2002) y Thompson y Saldanha (2003) señalan como indispensable para que el alumno comprenda el tamaño relativo de la fracción, es decir, el alumno debe reconocer la iteración como un medio para determinar una medida. Esta acción le permite reconocer a la fracción como independiente de la unidad de referencia y generar esquemas para comprender las fracciones impropias, un ejemplo de ello es la siguiente justificación de un alumno.

(A) $\frac{9}{\boxed{10}}$ $\frac{10}{\boxed{9}}$

La medida de $\frac{9}{\boxed{10}}$ *es más pequeño que* $\frac{10}{\boxed{9}}$ *porque* $\frac{9}{\boxed{10}}$ *ni siquiera forma un Tije y* $\frac{10}{\boxed{9}}$ *es más grande porque si forma un Tije con un* $\frac{1}{\boxed{9}}$

No forma un Tije *Sí forma un Tije*

En la respuesta anterior, se puede ver que el alumno expresa "$\frac{9}{\boxed{10}}$ ni siquiera forma un *Tije*", en su justificación 9/10 es menor porque no es la unidad completa, mientras que 10/9 sí forman un *Tije* y por lo tanto es mayor.

Conforme el análisis de las respuestas de los alumnos, podemos deducir que estas son evidencias de que los objetivos planteados en esta tercera práctica se han logrado, pues los alumnos ya pueden justificar por qué una fracción es menor, igual o mayor que la unidad de referencia utilizando argumentos relacionados con factores multiplicativos. Además, comprenden la fracción como independiente de la unidad. Estas ideas se han hecho presentes en sus respuestas dadas en las tareas de comparación. Al tener en cuenta que las unidades y subunidades son independientes unas de las otras, los alumnos pueden realizar las iteraciones necesarias sin tener como límite la unidad, de esta manera evitan confusiones respecto de su tamaño.

La tercera práctica concluye cuando los alumnos muestran la capacidad de comparar correctamente el tamaño de medidas mediante las iteraciones de las subunidades y de interpretar la simbología que representa a dichas medidas, símbolos que se integran con dos números, el denominador que alude al tamaño del *pequeño* y el numerador que indica el número de veces que se itera la subunidad. La generalización de estas ideas relativas al significado (fracción) y significante (símbolos) se da una vez que se han implementado las seis prácticas matemáticas de la TEDE.

Las nociones desarrolladas servirán de base para determinar si una fracción es menor o mayor a la unidad de referencia y reconocer cuando es menor, mayor o igual que una medida, con ello se facilita la comprensión de las fracciones impropias y la superación de la dificultad que surge cuando la concepción de las fracciones es construida a partir de las nociones del significado parte-todo.

CONCLUSIONES

Por años se han buscado formas para acercar a los alumnos al mundo de las fracciones porque es uno de los objetos matemáticos más complejos para aprender en la educación básica y dicha complejidad se acentúa en los grados escolares superiores. Por lo anterior las dificultades para su aprendizaje y su enseñanza han sido objeto de estudio en múltiples investigaciones, es el caso de este trabajo que muestra los resultados de un experimento de diseño cuyo objetivo fue la constitución de objetos mentales sobre la fracción impropia y la puesta a prueba de unos medios didácticos para su enseñanza.

Los resultados permiten concluir que mediante el razonamiento de magnitudes continuas, específicamente de longitud, se puede construir una alternativa de enseñanza a las fracciones que haga énfasis en un esquema multiplicativo para contribuir a la interpretación de otras propiedades de estos números.

En el desarrollo de la TEDE, específicamente de la tercera práctica, el objetivo era que los alumnos fueran capaces de reconocer si una fracción es de menor, mayor o igual longitud que la unidad para identificar la independencia entre la unidad y las subunidades, sin desconocer la relación que guardan entre sí. Estas nociones se han desarrollado antes en investigaciones de Cortina y Visnovska (2008, 2013) en las que concluyen que la inmensa riqueza fenomenológica del trabajo con fracciones favorece su interpretación al tomar en cuenta la noción de comparación de medidas realizada por Freudenthal.

Conforme fue avanzando la TEDE se pudo observar que el discurso de los alumnos mostraba la constitución de objetos mentales que les permitían distinguir una medida mayor que otra usando como referencia a la unidad, es decir que comprenden la relación entre la unidad y la subunidad como medidas recíprocas (A es 9 veces B por lo tanto B es 1/9 de A) y si la fracción "llena el *Tije*" (es igual), "no lo llena" (es menor) o "lo rebasa" (es mayor), lo que a su vez les permite comparar fracciones de diferentes tamaños; dichos objetos mentales también les permiten distinguir las fracciones propias de las impropias.

A través de la medición de tiras, como lo plantea la situación contextualizada en los *acajay*, los alumnos lograron determinar cuál tira es más grande y justificar por qué una es mayor que la otra, además utilizaron discursos que evidencian los conocimientos adquiridos con el desarrollo de la TEDE.

Las conversaciones colectivas son el fundamento del principio de interacción, en estas se ha mostrado la efectividad de la implementación de la tercera práctica ya que sus argumentos evidencian que han desarrollado objetos mentales sobre fracciones impropias. Dichas conversaciones se corresponden con la idea de la EMR que postula el aprendizaje como una actividad social en la que los alumnos muestran sus estrategias e invenciones y "al escuchar y observar lo que otros han desarrollado y escuchar las distintas maneras de resolver un problema, se les permite tomar algunas de esas ideas para mejorar naturalmente sus estrategias" (Santamaria, s/f. p. 22). De esta manera las nuevas ideas que se matematizan y reinventan ocupan un lugar entre los conocimientos de los alumnos, posteriormente les servirán para trabajar ideas y conceptos relacionados con las fracciones que regularmente resultan en obstáculos para la apropiación de nuevos saberes.

Los resultados de la tercera práctica nos permiten brindar a los docentes herramientas (objetivos y actividades de la agenda, normas matemáticas para guiar la clase, el concepto de fenomenología didáctica) para iniciar el trabajo con fracciones y también pueden servir de base para futuros investigadores que deseen profundizar y ampliar la TEDE aquí trabajada y buscar los medios propicios para que los alumnos constituyan objetos mentales sobre las fracciones impropias y sobre la comparación de estas. Solo resta recordar que la TEDE aplicada es un recurso inacabado y con posibilidades de mejorarse.

REFERENCIAS

Bressan A., Zolkower B., y Gallego M. (2004). La educación matemática realista. Principios en que se sustenta. *Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática*. Agosto 2004. Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH)

Briceño, O. y Buendía, G. (2015). Los experimentos de diseño y la práctica de modelación: significados para la función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 45*, 65-83. http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/ view/656/1189

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. (Traducción de: FREGONA, Dilma). Editorial Zorzal.

Campo, R y Llinares, S. (2015). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes de educación primaria (9-12 años) [comunicación]. *Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Julio 2015,* https://17jaem.semrm.com/aportaciones/n120.pdf

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.) *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). https://doi.org/10.4324/9781410602725

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *American Educational Research Association*, *32*, 9-13. http://www.jstor.org/stable/3699928

Cobb, P., Visnovska, J., y Zhao, Q. (2008). Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education. *Education et Didactique* (pp. 105-124). https://doi.org/10.4000/educationdidactique.276

Cortina, J. L., Visnovska, J., y Zuñiga, C. (2008). Un punto de partida alternativo para la instrucción de fracciones. *Educación Matemática*, *20*(2), 35-61. https://www.revista-educacion-matematica.com/descargas/Vol25-2.pdf

Cortina, J. L., Cardoso, E. y Zúñiga, C. (2012). El significado cuantitativo que tienen las fracciones para estudiantes mexicanos de 6º de primaria. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *14*(1), 70-85. http://redie.uabc.mx/vol14no1/contenido-cortinacardozo.html

Cortina, J. L., Zuñiga, C., y Jana, V. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática*, *25*(2), 7-29. https://www.revista-educacion-matematica.com/pdf/documentos/REM/REM25-2/Vol25-2-1.pdf

Cortina, J. L. (2014). Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño. *Educación Matemática*, 25 años 270-284. https://www.redalyc.org/pdf/405/40540854014.pdf

D'Amore, B., Font, V., y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradígma*, *28*(2), 49-77. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011225120070002000003&lng=es&tlng=es

Delgado, I. y Cortina, J.L. (2021). La educación matemática realista. Naturaleza y posibles aportes en México. En Aguayo, L y Calderón, J. (Eds.). *Formación y profesión docente. Entre prescripciones teorías y prácticas Educativas*. (pp. 325-342). Taberna Librería.

Fandiño, M. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Editor Magisterio.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Library of Congress Catalog Card Number 72-77872. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2

Freudenthal H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

Freudenthal, H. (1986). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* (Vol. 1). Medios de ciencia y negocios de Springer.

Freudenthal, H. (2005). *Revisando la educación matemática: conferencias en China* (Vol. 9). Medios de ciencia y negocios de Springer.

Gravemeijer, K. y Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: un matemático en didáctica y teoría del currículo. *Revista de estudios curriculares*, *32*(6), 777–796. https://doi.org/10.1080/00220270050167170

Kieren, T. (1980). "The rational number construct–Its elements and mechanisms". En Kieren, *Recent research on number learning* (pp. 125-149).

Luna, C y Aguayo, L.M. (2021). El experimento de diseño. Una alternativa metodológica para la investigación y la innovación. En Aguayo, L y Calderón, J. (Eds.). *Formación y profesión docente. Entre prescripciones teorías y prácticas educativas*. (pp. 325-342). Taberna Librería Editores.

Pruzzo, V. (2012). Las fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza?. *Revista Pilquen* 8, 1-14. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:169359222

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En Rico, I. (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (pp. 61-94).

Santamaría, F. (2006). *La contextualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda* [Tesis de maestría, Universidad Nacional del Comahue]. https://docplayer.es/12979482-La-contextualizacion-de-la-matematica-en-la-escuela-primaria-de-holanda.html

Steffe, L. (2002). Una nueva hipótesis sobre los niños en conocimiento fraccional. *Departamento de Educación Matemática*.

Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En Anthony Kelly y Richard Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Lawrence Erlbaum Associates.

Stephan, M., Bowers, J., Cobb, P. y Gravemeijer. (2003). Apoyar el desarrollo de las concepciones de medición de los estudiantes: analizar el aprendizaje de los estudiantes en el contexto social. *Revista de investigación en educación matemática. Monografía,* 12. Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas. http://www.jstor.org/stable/i30037716

Thompson, P. y Saldanha, L. (2003). Fracciones y razonamiento multiplicativo. En J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (Eds), *Investigación complementaria de los Principios y estándares para las matemáticas escolares* (pp. 95-114). Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education. The Wiskobas Project*. Springer Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-3707-9

Tossavainen A. y Helenius O. (2024). Student Teachers' Conceptions of Fractions: A Framework for the Analysis of Different Aspects of Fractions. *Mathematics Teacher Education and Development, 26*(1). https://mted.merga.net.au/index.php/mted/article/view/889

Tzur, R. (1999). Un estudio integrado de la construcción de fracciones impropias por parte de los niños y el papel de los maestros en la promoción de ese aprendizaje, *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 390-416. http://dx.doi.org/10.2307/749707

Valenzuela, C., García, M. y Nájera, A. (2019). Diseño de actividades para iniciar el estudio de las fracciones en educación primaria. En Hernández, Borja, Slisko y Juárez. (Eds.). *Aportes a la educación matemática basados en la investigación.* (pp. 161-183*).* El Errante Editor

Autor de correspondencia.
Ivette Anel Delgado Valdez

Dirección: Universidad Pedagógica Nacional – Unidad 321, Zacatecas
1975403012@alumnos.upn.mx
4928705291
Paseo de los Encinos 106, Valle de los Encinos; Guadalupe, Zac., C.P. 98604

 https://doi.org/10.24844/EM3603.03

Un estudio de la redención matemática en docentes mexicanos

A study of mathematical redemption in mexican teachers

Blanca Yareli Pérez-Torres,[1] María del Socorro García González[2]

Resumen: La redención matemática se refiere a un proceso de reconstrucción de la relación personal de un sujeto hacia las matemáticas, en el que cambia de una relación negativa a una relación positiva. A partir de este concepto, se desarrolló una investigación cualitativa cuyo objetivo fue identificar la presencia de la redención matemática en 249 docentes en servicio de educación básica en México y conocer los factores motivadores y de desmotivación que están intrínsecos en el fenómeno. La recopilación de datos se basó en el uso de narrativas examinadas desde el análisis temático y el modelo hipotético del proceso de redención matemática. Los resultados revelaron la existencia del fenómeno en 117 docentes. Entre ellos, la superación personal se destacó como el factor motivador más mencionado, mientras que los docentes que previamente les enseñaron matemáticas, fueron identificados como el principal factor de desmotivación.

Palabras clave: *Redención matemática, docentes, narrativas, desmotivación, motivación.*

Fecha de recepción: 24 de agosto de 2023. **Fecha de aceptación:** 11 de octubre de 2024.

[1] Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero, 16454309@uagro.mx; yareliperto@gmail.com, https://orcid.org/0009-0007-3076-2056.

[2] Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero, msgarcia@uagro.mx, https://orcid.org/0000-0001-7088-1075

Abstract: Mathematical redemption refers to a process of reconstruction of the personal relationship of a subject toward mathematics, in which he/she changes from a negative to a positive relationship. Based on this concept, qualitative research was developed to identify the presence of mathematical redemption in 249 teachers in basic education in Mexico and to know the phenomenon's intrinsic motivating and demotivating factors. Data collection was based on the use of narratives examined through thematic analysis and the hypothetical model of the mathematical redemption process. The results revealed the existence of the phenomenon in 117 teachers. Among them, self-improvement stood out as the most mentioned motivating factor, while teachers who had previously taught them mathematics were identified as the main demotivating factor.

Keywords: *Mathematical redemption, teachers, narratives, demotivation, motivation.*

INTRODUCCIÓN

La redención matemática es un fenómeno que se refiere a una reconstrucción personal de la relación que hay entre un sujeto y las matemáticas; pasando por un proceso de experiencia negativa con la disciplina a una reversión de la experiencia. Este término fue acuñado por Di Martino *et al.* (2013), al indagar sobre la relación con las matemáticas de docentes italianos en formación de primaria. Los resultados del estudio indicaron que la relación de los docentes en formación de primaria con las matemáticas mejoró con el tiempo, y que la redención matemática se ve influida, mayoritariamente, por factores tales como la relación con sus docentes de matemáticas, quienes aparecieron como modelos negativos que provocaban que los docentes en formación tuvieran una relación negativa con las matemáticas, o en el caso contrario, surgían como modelos positivos, ya que influían en que sus estudiantes reconstruyeran sus experiencias negativas en relación con las matemáticas.

Una búsqueda de investigaciones sobre el fenómeno de la redención matemática reveló que ha recibido poca atención desde su identificación inicial. En consecuencia, decidimos investigar la redención matemática en docentes en servicio de educación básica en México, con el objetivo de explorar este fenómeno más allá de su contexto original. Nuestra intención era determinar si la redención matemática es intrínseca a la profesión docente y no simplemente un efecto contextual, además de profundizar en el entendimiento de su desarrollo. Nos interesaba especialmente conocer si los docentes en servicio habían experimentado esta redención matemática.

La elección de los docentes de educación básica, quienes enseñan a estudiantes entre los 6 y 15 años (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, 2015), se justifica porque ellos inician la enseñanza de las matemáticas, representando el primer contacto de los estudiantes con la materia, mismo que resulta crucial ya que las experiencias iniciales pueden influir en las percepciones que los estudiantes desarrollen a lo largo de su vida escolar.

La pregunta de investigación planteada fue: ¿cuáles son los factores que desencadenan la redención matemática en docentes de educación básica en México? Para poder responderla, era indispensable que los docentes hubieran experimentado personalmente la redención matemática. Esta formulación de la pregunta refleja nuestro interés no solo en identificar la redención matemática, sino en comprender sus causas.

REVISIÓN DE LA LITERATURA

Docentes y su relación con las matemáticas

La relación entre los docentes y las matemáticas se teje a través de una compleja interacción entre diversas dimensiones. Esta relación no solo se forja a partir de las experiencias vividas durante la etapa estudiantil, sino que también se nutre de la práctica adquirida en el rol docente. No obstante, esta dinámica está enriquecida y moldeada por elementos afectivos, como creencias, emociones y actitudes. Entre estos elementos, las emociones sobresalen como un componente esencial que ejerce una influencia profunda en la relación entre los docentes y las matemáticas (Martínez-Sierra *et al.*, 2018). En esta sección, se centra la atención en las emociones y actitudes, reconociéndolas como factores determinantes en la redención matemática.

Aclaramos al lector que las definiciones de emoción y actitudes no son unánimes en los estudios de la línea del dominio afectivo. Sin embargo, entenderemos a la actitud como una disposición a responder favorable o desfavorablemente ante las matemáticas (Ajzen 1988), y las emociones las entenderemos como "reacciones con valencia ante acontecimientos, agentes u objetos, la naturaleza particular de las cuales viene determinada por la manera como es interpretada la situación desencadenante" (Ortony *et al*., 1996, p. 16). En los siguientes reportes de investigación, si bien los autores tienen otras definiciones de estos conceptos, coincidimos en que se corresponden. Por ejemplo, el miedo y la ansiedad son emociones que provienen de reacciones de valencia negativa, y el disfrute como actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas se puede interpretar como una disposición favorable hacia esta asignatura.

Di Martino y Sabena (2011) llevaron a cabo una investigación con 167 docentes en formación de primaria de una universidad de Italia, con el objetivo de identificar sus emociones en cursos de matemáticas a lo largo de su vida escolar y las emociones sobre su futura enseñanza. Los resultados mostraron la existencia de más emociones negativas en la vida escolar y menos emociones positivas; entre ellas sobresalieron el miedo y la ansiedad.

Gómez-Chacón y Marbán (2019) llevaron a cabo un estudio en España que involucró a docentes en preservicio de primaria, en el que analizaron el papel de las actitudes hacia la enseñanza de las matemáticas durante la formación profesional. Se descubrió que aquellos participantes que disfrutaban aprendiendo matemáticas, deseaban aprender más y tenían un gusto por la asignatura, manifestaban una buena actitud hacia la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, la ansiedad matemática se identificó como un factor que disminuye o anula el interés por la enseñanza de las matemáticas.

En México, García-González y Martínez-Sierra (2020), estudiaron el caso de Diego, un profesor novel de secundaria (estudiantes de 12-15 años). Diego experimentaba emociones negativas como frustración, temor, agobio e inseguridad en su enseñanza debido a la falta de conocimiento matemático. Estas emociones cambiaron, cuando se sometió a un proceso de acompañamiento docente denominado "coaching emocional", que consistió en aumentar su conocimiento matemático. Este proceso ayudó a Diego a ganar seguridad y confianza en sus propios conocimientos, lo que mejoró su práctica docente, y desencadenó emociones positivas como el disfrute y la alegría al enseñar.

Las investigaciones antes mencionadas muestran que la relación que los docentes establecen con las matemáticas se basa tanto en sus experiencias escolares como en sus experiencias de enseñanza. En el caso de los docentes en formación, es notable la presencia de emociones negativas, como la ansiedad matemática, que disminuye el interés por enseñar, lo que puede desencadenar una relación negativa con las matemáticas y obstaculizar la enseñanza futura. Un rechazo hacia las matemáticas en docentes en servicio podría llevar a situaciones de estrés, como en el caso documentado de Diego, cuando la falta de conocimiento matemático ocasionaba inseguridad en su enseñanza. Sobre los docentes que experimentan emociones y actitudes negativas hacia la enseñanza de las matemáticas, suponemos que algunos cambian esa relación negativa, y en ello interviene la redención matemática, mientras que otros no la experimentan y continúan manteniendo la relación negativa.

Estudios sobre la redención matemática

Como se mencionó, la redención matemática fue identificada en Italia por el estudio pionero de Di Martino *et al.* (2013), que analizó la experiencia de docentes en formación de primaria en relación con las matemáticas durante su etapa de estudiantes, y su perspectiva sobre la enseñanza. Se estudió a 90 futuros docentes de primaria inscritos en el curso obligatorio sobre Matemáticas y su Enseñanza del grado universitario para maestros de escuela primaria en una universidad pública italiana relativamente pequeña. En Italia la primaria comprende 5 años, y las edades de los niños van de los 6 a los 11 años.

Se encontró que la mayoría de los participantes había tenido una relación negativa con las matemáticas debido a experiencias escolares negativas. Sin embargo, a pesar de esta relación, tenían una perspectiva positiva sobre la enseñanza de las matemáticas en el futuro, lo que se denominó redención matemática. Los desencadenantes de la relación negativa con las matemáticas incluían a los docentes que les enseñaron matemáticas y las dificultades en la asignatura que desmotivaban a los docentes en formación al no poder comprender los contenidos matemáticos. Ante estos factores desmotivantes, la redención matemática surgió como una reconstrucción de la relación con las matemáticas y el deseo de convertirse en un buen profesor de matemáticas y no ser un modelo negativo para sus futuros alumnos.

Posteriormente, también en Italia, Coppola *et al.* (2013) indagaron más sobre la redención matemática en docentes en formación de primaria, centrándose en aspectos como la experiencia escolar con las matemáticas y la perspectiva hacia su futura práctica docente. El estudio incluyó a 189 futuros maestros de primaria de dos universidades italianas diferentes: una universidad pequeña en el sur y una más grande en el norte. Los participantes estaban inscritos en los cursos de Matemáticas y su Enseñanza, que se imparten durante el primer año de la carrera universitaria para maestros de primaria.

En cuanto a las experiencias escolares, los resultados indicaron principalmente emociones negativas como ansiedad, miedo y pánico, provocadas por sus docentes, las características innatas que los inclinaban hacia otras áreas diferentes a las matemáticas, el fracaso escolar y el desinterés por las matemáticas como asignatura escolar. Por otro lado, en las perspectivas de enseñar matemáticas en el futuro, se encontraron principalmente emociones positivas como satisfacción, disfrute y curiosidad, motivadas por sus docentes en su etapa escolar, las características innatas que los inclinaban hacia el área de las matemáticas, el éxito y el interés por la disciplina. En estos resultados, los docentes que les impartieron clase a lo largo de su formación escolar aparecieron con mayor frecuencia como sujetos que influyeron en las emociones de los docentes en formación, y como consecuencia, en la relación negativa con las matemáticas, coincidiendo con el estudio de Di Martino *et al.* (2013). Sin embargo, también se presentaron como sujetos que ayudaron a reconstruir esta relación negativa. Cabe destacar que no se trataba del mismo docente.

Además, algunos docentes con una relación negativa con las matemáticas veían en la perspectiva de enseñar una posibilidad de redimirse en su relación con la disciplina, mientras que otros, por el contrario, declaraban sentirse inseguros para realizar un trabajo que consideraban importante pero difícil. De hecho, casi todos los participantes consideraban la enseñanza de las matemáticas un desafío difícil, pero había una clara distinción entre aquellos que la veían como un desafío estimulante y los que la veían como un obstáculo insuperable. En el último caso, la idea de tener que enseñar matemáticas provocaba fuertes emociones negativas. Según los autores, estas emociones negativas hacia la perspectiva de tener que enseñar matemáticas están fuertemente influenciadas por una baja percepción de competencia hacia las matemáticas y hacia su enseñanza. Concluyeron que el grado de confianza en la posibilidad de redención matemática está estrechamente vinculado tanto a aspectos cognitivos (conocimientos matemáticos y didácticos) como afectivos.

El estudio de Coppola *et al.* (2013) amplió la muestra de participantes y confirmó la presencia de la redención matemática, así como su asociación con emociones negativas y con la percepción de competencia hacia las matemáticas y su enseñanza. Sin embargo, al realizarse en el mismo contexto geográfico que el estudio pionero, nuestra intención fue determinar si la redención matemática es intrínseca a la profesión docente y no simplemente un efecto contextual. Decidimos por ello estudiarla en docentes mexicanos en servicio bajo el supuesto de que aquellos que vivieron la redención matemática experimentaron un cambio en su relación con las matemáticas y un deseo de enseñarlas.

REFERENTE CONCEPTUAL. LA REDENCIÓN MATEMÁTICA

La redención matemática, según la definición de Di Martino *et al.* (2013), se refiere a "el deseo de enfrentar el desafío de enseñar matemáticas a partir de una reconstrucción personal de la relación con esta disciplina" (p. 226, traducción propia), por tanto, implica un proceso y un cambio en la relación del sujeto con las matemáticas, partiendo de experiencias previas negativas o desafiantes hacia el desarrollo de un deseo y motivación para enfrentar el reto de enseñarla.

Para comprender mejor este proceso, con base en los trabajos de Di Martino *et al.* (2013) y Coppola *et al.* (2013), determinamos un proceso hipotético que describe las fases involucradas en la redención matemática, donde, además de las emociones y actitudes, aparece la motivación, constructo que entendemos desde la perspectiva de Middleton (2020) como el ímpetu para iniciar y mantener la actividad matemática. Mientras que la motivación impulsa a las personas a actuar y perseverar hacia metas específicas, la desmotivación se refiere a la falta de interés, entusiasmo o determinación para realizar ciertas actividades o alcanzar ciertos objetivos.

Proceso hipotético de redención matemática

- *Fase 1. Experiencias escolares y externas*: Se refiere a las interacciones tempranas con las matemáticas en entornos escolares y externos, que pueden influir en las emociones y actitud inicial hacia ellas.
- *Fase 2. Factores de desmotivación*: Es aquello que contribuye a la falta de impulso para mantener la actividad matemática, como las emociones negativas, la falta de apoyo o las dificultades académicas.
- *Fase 3. Establecimiento de una relación negativa*: Es aquella relación con las matemáticas, caracterizada por el rechazo o la falta de interés hacia la materia.
- *Fase 4. Intervención de factores motivadores*: Todo aquello que impulsa a iniciar y mantener la actividad matemática, como el apoyo de mentores o el reconocimiento de la importancia de las matemáticas en la vida diaria.
- *Fase 5. Reconstrucción de la relación*: Los factores motivadores desencadenan un proceso de reconstrucción de la relación con las matemáticas, promoviendo una visión más positiva y una mayor disposición para enfrentar los desafíos asociados con la enseñanza de las matemáticas.

- *Fase 6. Desarrollo de una relación positiva y el deseo de enseñar*: Aquella relación con las matemáticas, caracterizada por el interés hacia ellas que culmina en un deseo y motivación para enseñarlas.

Cabe señalar que, con base en el objetivo de investigación, el análisis de datos puso especial interés en las fases 2 y 4.

METODOLOGÍA

Se adoptó un enfoque cualitativo ya que se pretendió conocer desde la voz de los docentes las experiencias que vivieron en su etapa como estudiantes en relación con las matemáticas. Además, la investigación fue de tipo exploratorio (Tarrés, 2013), debido a que la revisión de la literatura reporta pocos estudios donde abordan el fenómeno en cuestión.

Contexto de la investigación y participantes

La educación básica en México está a cargo de profesionales cuya práctica docente depende del nivel educativo y del tipo de servicio al que están vinculados. La gran mayoría de ellos reciben su formación en las llamadas Escuelas Normales y en otros casos en Universidades del sector público y privado, esto con la finalidad de prepararse para impartir todas las disciplinas establecidas en los programas de estudio, incluyendo las matemáticas. El sistema básico comprende el nivel preescolar (niños 3-6 años), primaria (6-12 años) y secundaria (12-15 años), incluyendo la telesecundaria.

La investigación se desarrolló dentro de un contexto de formación continua, en un taller virtual para docentes de educación básica en el estado de Puebla, México, llamado “Herramientas para regular las emociones en el aula de matemáticas” impartido en diciembre de 2021 por la segunda autora. El taller tenía como objetivo la regulación de emociones negativas en el aula de matemáticas, lo que sugiere que los asistentes tenían interés en mejorar su relación personal con las matemáticas. Esto representó un espacio idóneo para explorar el fenómeno de redención matemática, que se centra precisamente en la relación emocional hacia dicha disciplina. De esta manera los participantes fueron 249 docentes, entre los cuales había 189 mujeres y 60 hombres, todos ellos con edades diferentes (23-60 años) impartiendo clases en niveles distintos entre primaria mayoritariamente, telesecundaria y secundaria.

Instrumento de recolección de datos

Se recurrió a la narrativa (Rojas, 2008) como instrumento de recolección de datos, su elección resultó especialmente adecuada para el objetivo de la investigación, ya que permitió recopilar datos sobre las experiencias escolares pasadas de los docentes con las matemáticas. Además, la utilización de enfoques narrativos en la investigación educativa ofrece un camino esclarecedor para comprender las vivencias de docentes en su etapa como estudiantes (Kaasila *et al.*, 2007; Stoehr, 2017).

La narrativa permite explorar cómo los individuos estructuran y otorgan significado a sus experiencias a través de historias y, cómo estas influyen en la formación de su identidad, creencias, emociones y práctica pedagógica actual. De acuerdo con Stoehr (2017), las narrativas autobiográficas emergen como ventanas que revelan no solo eventos pasados, sino también la coherencia, el sentido y las estrategias de afrontamiento que los docentes han desarrollado ante desafíos, como la ansiedad matemática.

Para elaborar la narrativa, se pidió a los docentes que describieran su relación con las matemáticas desde su etapa como estudiantes hasta el momento de la escritura solicitada. Se les permitió total libertad para escribir, lo que fue crucial para obtener información de su relación con las matemáticas e identificar el fenómeno de redención matemática.

La narrativa se debía escribir en formato de procesador de textos y enviar por correo electrónico. Para identificar las narrativas de los docentes, se utilizó un código específico que incluía las iniciales de DH o DM para los docentes hombres o mujeres, seguido del número de participante y el número total de participantes que entregaron la narrativa (1−249). Esta codificación aseguró la privacidad y confidencialidad de los datos, al mismo tiempo que facilitó la identificación de cada narrativa para su posterior análisis.

Se empleó el análisis temático (Braun y Clarke, 2006) para identificar, analizar y reportar patrones en las narrativas de los participantes que se correspondieran con las fases del proceso hipotético de la redención matemática, dicho análisis se extendió hasta alcanzar la saturación teórica, asegurada a través de la estrategia de triangulación por investigadores (Rothbauer, 2008).

RESULTADOS

Para el inicio del análisis de los datos, se consideraron las 249 narrativas entregadas por los docentes; luego de la familiarización con ellas (primera fase del análisis temático), se descartaron 132, ya que 27 no mostraban suficiente evidencia de la relación con las matemáticas (narrativa 0), y 105 exhibieron que los participantes habían mantenido una buena relación con las matemáticas durante toda su etapa escolar.

> **DM1:** Soy la profesora ... he tenido la experiencia de trabajar en 3 escuelas diferentes y distintos contextos..Hoy en día estoy a cargo de Primer grado, por lo que la enseñanza de las matemáticas en estos últimos años ha sido un poco más complicada por la situación pandémica que vivimos. Es muy importante que desde pequeños se les enseñe a los alumnos las matemáticas de una manera atractiva, hacer uso de materiales concretos y que puedan manipular, ... que ellos experimenten a través del ensayo y el error, trabajar el conteo, actividades para agrupar, ... entre otras cosas... Cuando tenemos el tiempo destinado para las actividades de esta asignatura, trato de poner muchos ejemplos, escuchar sus ideas, guiar el trabajo, aunque también a veces por las situaciones de tiempo y presión de avanzar con los contenidos tengo que apresurar los procesos de los alumnos y se quedan la mayoría de veces con lo tradicional. Pero me voy proponiendo tomar en cuenta otras formas de enseñanza que permitan a mis alumnos desarrollar de manera autónoma ese pensamiento matemático necesario para la vida. **Narrativa 0.**

La narrativa anterior describe las experiencias actuales de la docente en la enseñanza de las matemáticas, mencionando desafíos como la situación pandémica y la necesidad de hacer las lecciones atractivas y prácticas. Sin embargo, no proporciona información sobre la relación pasada con las matemáticas.

De esta manera la atención se centró en 117 narrativas que evidenciaron el fenómeno de la redención matemática, 94 mujeres (80.34%) y 23 hombres (19.65%). Una vez identificadas las narrativas que daban cuenta de la redención matemática, se llevó a cabo la identificación de los factores de desmotivación y motivadores.

A modo de ejemplo, se presentan extractos de la narrativa de la docente DM-190 (narrativa 1), en ella aparece la figura del docente como factor desmotivante que favoreció la relación negativa con las matemáticas, misma que se codificó como *influencia docente (ID-fase 2),* y como factor motivante aparece la figura de su padre, al que se ha codificado como *Influencia familiar (IF-fase 4)*.

> **DM-190**: En la primaria tuve un maestro que hacía mucha distinción entre los compañeros y casi siempre la atención era para la compañera más inteligente [Influencia docente, componente 2]...Mi papá con paciencia me ayudó a ir mejorando en mi desempeño; recuerdo que casi siempre lo que me enseñaba era con retos de cálculo mental, y me ponía retos en forma de juego. Cada día mi padre me hacía sentir importante [Influencia familiar, fase 4]... y aunque en la escuela me sentía triste porque notaba que al maestro no le importaba [Influencia docente, fase 2]... mi papá siempre me ayudaba y al otro día en clase presumía al profesor que ya había podido [Influencia familiar, fase 4]... Cuando entré a la secundaria tenía mucho gusto por las matemáticas [Reconstrucción de la relación personal con la asignatura], pero eran nuevos retos con las ecuaciones y números imaginarios, así que mi papá quedó fuera, ya que él no sabía hacerlo. **Narrativa 1.**

La narrativa de la docente muestra indicios de la transformación de su relación con las matemáticas a lo largo del tiempo. En la primaria, su maestro favorecía a ciertos estudiantes y a ella le generó sentimientos de injusticia y devaluación. Sin embargo, la influencia positiva y paciente de su padre cambió esta perspectiva, alentando su aprendizaje a través de desafíos y juegos, y reforzando su confianza. A pesar de la tristeza causada por su maestro en la escuela, el apoyo constante del padre le brindó una sensación de éxito. Este caso muestra cómo la influencia negativa del maestro en la primaria contrasta con el apoyo constante del padre, creando una transformación positiva en su relación con las matemáticas.

De manera análoga, se aplicó el mismo proceso con las demás narrativas, con el propósito de identificar los factores de desmotivación y motivadores presentes en la relación con las matemáticas. Esto condujo a la detección de un total de 10 factores, de los cuales seis corresponden a la fase 2 (factores de desmotivación) y el resto a la fase 4 (factores motivadores) del proceso hipotético de redención matemática, tal como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Factores de desmotivación y motivadores acerca de las matemáticas.

Fases	**Factores**	**Frecuencia**
2: desmotivación	Docentes	78
	Resolución de problemas	47
	Carencia de conocimientos matemáticos	20
	Familiares	18
	Falta de sentido de las matemáticas	14
	Compañeros de clase	1
4: motivación	Superación personal	72
	Docentes	59
	Familiares	12
	Uso de material didáctico	6

Fuente: Elaboración propia.

Es importante notar que la suma total de la columna de frecuencia no concuerda con la cifra total de 117 que corresponde al número de docentes que experimentaron el fenómeno. Esto se debe a que, varios casos presentaban evidencia de más de un factor.

Tal como se puede apreciar en la Tabla 1, el factor que aparece con mayor frecuencia entre los elementos de desmotivación es el docente. En contraste, en los factores motivadores, el aspecto más recurrente está relacionado con la búsqueda de superación personal. Sin embargo, es relevante destacar que el factor "docente" se presenta en ambas fases, lo que señala su alta influencia en la redención matemática, en línea con lo mencionado en la literatura (Di Martino *et al.*, 2013).

Enseguida se detallan los factores que desencadenaron una experiencia negativa y positiva acerca de las matemáticas, organizados según su naturaleza de desmotivación o motivadora. Los factores se presentan en orden descendente, considerando su frecuencia en el estudio. Cabe señalar que cada una de las transcripciones pertenecen al archivo de esta investigación.

Factores de desmotivación en relación con las matemáticas

Docentes

Los docentes son un factor influyente en la relación de los alumnos con las matemáticas, según se reporta en la literatura revisada (Coppola *et al.*, 2013; Di Martino *et al.*, 2013;), y se confirma en esta investigación como un factor negativo altamente influyente en los docentes cuando eran alumnos. Según relatan los participantes, durante su etapa de formación, los docentes los orillaron a experimentar una relación negativa con las matemáticas, debido al maltrato que recibieron, tanto físico como verbal, siendo este último especialmente perjudicial para su bienestar psicológico, véase el siguiente extracto.

> **DM-20:** Desde mi escolaridad en nivel primaria, recuerdo aversión hacia las matemáticas, tuve maestros que me producían temor. [...] Recuerdo que, al preguntarme las tablas de multiplicar, no admitían errores, de lo contrario nos golpeaban con el metro. Por lo anterior, puedo decir que mi primera experiencia con los docentes que me impartieron esta asignatura (matemáticas), fue negativa, ya que la trabajé en muchas ocasiones con temor al error. **Narrativa 2.**

En narrativas paralelas, los participantes argumentaron que este tipo de docentes fue un modelo que les resultaba imposible de seguir cuando ellos mismos se convirtieron en docentes.

Resolución de problemas

Este factor se sitúa en segundo lugar como altamente influyente en la relación negativa con las matemáticas lo que concuerda con la literatura (Coppola *et al.*, 2013; Quintanilla y Gallardo, 2020). Los participantes relatan que el hecho de no poder resolver los problemas generaba en ellos emociones negativas, como estrés, desesperación e inseguridad, lo que los orilló a evitar las matemáticas para no experimentarlas. Es especialmente ilustrativo el caso del docente DH-26, quien compartió que, a pesar de recibir indicaciones sobre qué operación utilizar para abordar el problema, lo percibía difícil de resolver (narrativa 3).

> **DH-26**: [...] Los problemas también eran muy difíciles para mí, a pesar de que mis maestros decían “hoy vamos a resolver problemas de suma” o de cualquier otro de

> algoritmo, claramente nos decían con qué operación podríamos resolver el problema. **Narrativa 3.**

El testimonio anterior ilustra los desafíos que enfrentan algunos estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas a pesar de recibir orientación. También sugiere que el estudiante podría no haber comprendido completamente los conceptos matemáticos involucrados, como la suma, lo que indica una falta de asimilación y comprensión de conceptos.

Carencia de conocimientos matemáticos

Aunque no se destaque como una influencia primordial, este factor ocupa el tercer lugar entre los aspectos de desmotivación hacia las matemáticas. Su impacto radica en ser una de las causas que provoca la dificultad para resolver problemas, como lo relatan los docentes en casos donde no lograron entender ciertos temas (narrativa 4), y en otros donde sus profesores proseguían las lecciones, sin asegurarse de la comprensión de lo previamente enseñado.

> **DM-242**: [...] no quería hacer la tarea, no me sabía las tablas y sentía un miedo tremendo. **Narrativa 4.**

La lección extraída de este factor es la necesidad de que los educadores estén conscientes de establecer una base sólida antes de adentrarse en temas más complejos. Esta conciencia debe traducirse en la atención a las necesidades individuales de cada estudiante, fomentando un ambiente de aprendizaje seguro y receptivo que aliente a los alumnos a plantear preguntas y expresar sus dudas.

Familiares

La influencia de los padres en el aprendizaje de las matemáticas es un tema ampliamente documentado en la literatura, por ejemplo, Bazán-Ramírez *et al.*, 2022 e Hidalgo *et al.*, 2005. Sin embargo, nuestros hallazgos destacan una realidad preocupante, el uso de la violencia física. Se mencionó que los padres recurrían a golpes para obligar a memorizar las tablas de multiplicar (narrativa 5).

> **DM-41:** [...] en clase nos escondíamos entre las cabezas de los compañeros en las filas, para que no nos preguntara, en una ocasión me pasaron al frente a resolver

> una división, me estaba regañando muy fuerte (el docente) y en ese momento mi padre llegó al aula, me sentí más presionada porque mi papá también tenía un carácter muy fuerte, me puse muy nerviosa y tardé en contestar la división, al llegar a casa mi papá me reprendió y todos los días me preguntaba las tablas y no me dejaba dormir hasta que las dijera correctamente. **Narrativa 5.**

Si bien es vital que tanto educadores como padres colaboren para crear un ambiente en el que los estudiantes se sientan seguros, apoyados y motivados para enfrentar desafíos matemáticos, no debería ser mediante el castigo ni la violencia física. Es fundamental promover métodos de enseñanza y crianza que sean respetuosos, positivos y empáticos, asegurando así que el ambiente de aprendizaje sea propicio para el crecimiento académico y emocional de los estudiantes.

Falta de sentido de las matemáticas

Los participantes indicaron otro factor relevante que influyó en su rendimiento en matemáticas, la sensación de que la asignatura no tiene sentido. Según su percepción, esta materia les generaba más emociones negativas que positivas, y llegaba un momento en el que no entendían su utilidad o propósito, lo que los llevaba a desarrollar un rechazo hacia ella.

La falta de sentido percibido en relación con las matemáticas representa una importante barrera para el aprendizaje y la motivación de los estudiantes. Esta situación tiene implicaciones significativas para la enseñanza de las matemáticas, y se requiere de estrategias específicas para abordarla. Una de ellas es hacer que el contenido matemático sea relevante para los estudiantes, una recomendación que ha estado presente en el currículo escolar por un tiempo, y que se fomenta aún más en la Nueva Escuela Mexicana (Secretaría de Educación Pública, 2022).

Compañeros de clase

La influencia negativa de los compañeros de clase se hizo evidente en un único caso, donde se ilustra claramente cómo la burla afectó profundamente a la participante (narrativa 6). En este caso específico, la burla estuvo relacionada con la discapacidad visual que la participante enfrentaba.

> **DM-143:** En mi época de estudiante, mi relación con las matemáticas no fue muy buena ya que era una persona muy tímida debido a que tenía problemas visuales y mis compañeros se burlaban de mí, la maestra no me brindó la confianza para expresar mi sentir, por lo que preferí quedarme callada, sentada en la última fila y sin hablar, eso trajo en mí repercusiones, me sentía triste, desanimada, insegura, estresada y cuando quise salir de esa zona me resultó difícil ya que se me complicaba desarrollar operaciones básicas. **Narrativa 6.**

La situación por la que atravesó la docente del caso, tuvo repercusiones significativas en su bienestar emocional, además, su intento posterior de superar estos obstáculos se vio mermado por su habilidad para llevar a cabo operaciones matemáticas. En este caso particular, se demuestra que la interacción social y la dinámica en el aula de clase son importantes factores para considerar en el aprendizaje de las matemáticas. Además de la inclusión y atención a la diversidad, ya que la experiencia en el aula es muy diferente en todos los estudiantes.

Factores motivadores en relación con las matemáticas

Superación personal

La superación personal se destacó como el factor principal que llevó a los participantes a reconstruir su relación negativa con las matemáticas (narrativa 7), lo cual está respaldado por la literatura (Di Martino *et al.*, 2013). Aquellos que se redimieron de sus experiencias pasadas expresaron su deseo de no permitir que sus estudiantes pasen por lo mismo que ellos vivieron, y evitar ser un modelo negativo para que sus estudiantes rechacen las matemáticas. Como resultado, estos participantes ahora en sus clases usan materiales concretos o manipulables para hacer que el aprendizaje sea divertido y eficaz, mostrando empatía hacia sus estudiantes. Es relevante destacar que la literatura respalda la idea de que la superación personal y la motivación puede ser un factor importante en la reconstrucción de una relación negativa con las matemáticas (Jacobson e Izsák, 2015).

> **DM-244:** Desde que iba en la primaria, las matemáticas se me dificultaban mucho. Mi padre era comerciante, se iba por días y cuando regresaba a casa, era para que mi madre le diera de comer a los trabajadores... estaba con mi madre y ella no tenía cimentadas las matemáticas, ni tiempo para enseñarme, no me ayudaba en las tareas,

> así que hacía lo que podía, pues los maestros se molestaban por no entregar las tareas terminadas. No reprobé, solo tuve bajas calificaciones en la mayoría de las materias. En sexto grado, una practicante vivía cerca de mi casa y fui a verla para que me enseñara a realizar unas fracciones, el maestro explicó en clase, pero no le entendí porque me ponía a platicar. La practicante me enseñó, le puse atención y se me hicieron fáciles de hacer y me dije a mí misma, "¡puedo hacerlo!", solo tengo que poner atención. **Narrativa 7.**

Del caso anterior se hace evidente la resiliencia (Martínez-Padrón *et al.*, 2022) y la autoeficacia (Cortés *et al.*, 2023) de la docente demostrando su determinación para superar los obstáculos buscando apoyo externo.

Docentes

Los docentes desempeñan un papel fundamental en la motivación de sus estudiantes hacia las matemáticas, ya sea de forma positiva o negativa (Coppola *et al.*, 2013; Di Martino *et al.*, 2013; Sabena *et al.*, 2015). Este estudio ha encontrado que algunos docentes contribuyen significativamente a que sus estudiantes reconstruyan su relación negativa con las matemáticas. Los participantes destacaron que la pasión y empatía que sus profesores mostraban durante la enseñanza eran motivadores y les hacía replantear su relación negativa con la asignatura (narrativa 8).

> **DH-45:** Cuando estaba en sexto grado de primaria la maestra de nombre Aurora nos enseñaba siempre con una amabilidad que borraba por completo el trauma que traía desde el tercer grado, me dio confianza y poco a poco le encontré sentido a todo aquello que me causaba aburrimiento y estrés. **Narrativa 8.**

Familiares

Al igual que el factor anterior, la influencia de los familiares puede ser tanto positiva como negativa en el aprendizaje de los estudiantes. En algunos casos, los familiares de los participantes fueron un factor positivo (narrativa 9), ya que los ayudaron constantemente en su aprendizaje, enseñándoles de una manera diferente a la escuela. Los familiares también motivaron a los participantes con su entusiasmo, y muchos los consideraron modelos a seguir.

> **DM-139:** [...] En la escuela nunca aprendí las operaciones fundamentales, más bien en casa fue donde me enseñaron, recuerdo que mi hermano me ayudaba... y otra hermana también, me ponía ejercicios para poder aprender la suma, resta, multiplicación y división...se me fue facilitando y obtenía buenos resultados, eso me hizo sentir segura ... en la escuela no explicaban mucho, pero ponían muchos ejercicios. **Narrativa 9.**

Los familiares fueron mencionados 12 veces en la investigación. Ello indica que su influencia es relevante y debe ser considerada en el compromiso con el aprendizaje de los alumnos, trabajando en equipo en la triada docente-alumno-familia.

Uso de material didáctico

Durante su formación como docentes, uno de los aspectos que motivó a los participantes fue el uso de material didáctico en la enseñanza de las matemáticas, lo cual les permitió conocer una enseñanza dinámica (narrativa 10).

> **DM-148:** [...] Cuando era pequeña, mi maestra me enseñaba solo poniendo cuentas y números en el pizarrón. No recuerdo un juego de matemáticas que me pusieran mis maestros, que me motivara, yo llegué a la secundaria sin haber desarrollado mi pensamiento lógico-matemático. Eso me trajo serios problemas porque se me hacía muy difícil la asignatura. Con el paso del tiempo en la preparatoria, comencé a ver las matemáticas como una oportunidad de aprender, mi maestro explicaba muy bien y me tenía paciencia. Pero yo ya tenía muchas dudas y lagunas en mi aprendizaje. ...Ingresé a la Normal y ahí descubrí el mundo mágico de las matemáticas, mi maestro era muy dinámico, todo lo enseñaba con juegos y materiales prácticos, nos invitaba siempre a innovar, nos decía: "sorpréndanme" ... En cada planeación de clase para mis prácticas buscaba cosas divertidas para mis niños. Y así comenzó mi amor por las matemáticas. **Narrativa 10.**

En el caso anterior, se subraya cómo la introducción de materiales didácticos despierta un interés y compromiso hacia las matemáticas, algo que la participante no había experimentado antes. Es importante destacar en su relato el impacto de la utilización de material manipulable durante su formación profesional. Esto es notable ya que, según la literatura (Bartolini y Martignone, 2014), el uso de tales recursos tiende a ser más frecuente en niveles educativos iniciales y disminuye con el tiempo.

CONCLUSIONES

La redención matemática, identificada en el estudio pionero de Di Martino *et al.* (2013), se manifestó en docentes en formación de primaria. En nuestro estudio, que incluyó a 249 docentes en servicio de educación básica en México –abarcando niveles de preescolar, primaria y secundaria– encontramos que 117 de ellos habían vivido el proceso de redención durante su formación académica. Esta continuidad en los resultados sugiere que la redención matemática no solo es un fenómeno contextual, sino que es intrínseca a la profesión docente.

Por otro lado, partiendo del supuesto de que el proceso hipotético propuesto implica el desarrollo de una relación positiva y el deseo de enseñar, podríamos argumentar que la redención matemática parece tener sentido solo para la población de docentes. No obstante, es plausible considerar que existen otras poblaciones que, aunque no se dediquen a la docencia, puedan experimentar este fenómeno. Por lo tanto, este concepto podría adaptarse fuera del contexto educativo mediante una redefinición que no incluya el deseo de enseñar. Por ejemplo, podríamos pensar en aquellos estudiantes que tuvieron una relación negativa con las matemáticas en el pasado, pero que lograron redimirse y ahora estudian carreras relacionadas con las matemáticas, como arquitectura o ingeniería.

Al centrar la atención en los factores motivadores y de desmotivación desencadenados por la redención matemática, los resultados dejan ver que los docentes que tuvieron en sus distintos niveles escolares jugaron un papel crucial, ya que actuaron, quizá sin ser consciente de ello, como modelos positivos o negativos. Los docentes que trataron a sus alumnos con respeto, fomentaron la aceptación de las matemáticas, mientras que aquellos que no mostraron interés o empatía, por sus alumnos o incluso los castigaban, generaron un clima de emociones negativas que condujo a valorar negativamente a las matemáticas.

Es crucial también considerar el contexto histórico y social en el que los participantes llevaron a cabo sus estudios. En tiempos pasados, el uso de castigo y violencia como métodos de enseñanza era más común en México, generando una combinación de responsabilidad y desmotivación en los estudiantes. Este enfoque podría haber tenido la intención de garantizar el aprendizaje, pero a menudo generaba experiencias emocionales negativas y, en algunos casos, contribuía a la formación de una relación adversa con las matemáticas.

Otro de los factores que se hallaron como motivadores y de desmotivación, son los familiares. Según los relatos de los participantes, los familiares pueden ser un modelo negativo cuando ejercen en ellos presión por sacar buenas notas, o cuando los golpean. Pero resultan modelos positivos cuando brindan acompañamiento y asesorías. Un dato revelador de las narrativas de los docentes fue encontrar que el factor primordial que motivó la reconstrucción de la relación con las matemáticas fue la superación personal, impulsada por su deseo de crecimiento académico y de superar la barrera negativa en la que habían estado por mucho tiempo.

En conclusión, comprender los factores que influyen en la redención matemática es fundamental para mejorar la enseñanza de las matemáticas y promover una relación más positiva con esta disciplina entre los docentes y los estudiantes. Al respecto se resalta el papel crucial de los docentes y la familia en la formación del estudiante, y se enfatiza la necesidad de prestar más atención a los alumnos si se quiere fomentar una buena relación con las matemáticas y crear condiciones óptimas para el aprendizaje.

Como implicaciones para la educación matemática, se destaca la importancia del conocimiento sobre la redención matemática en México, así como de los factores motivadores y de desmotivación. Y se sugiere la realización de más estudios para confirmar su presencia en otras regiones del país y niveles escolares. Como limitación del estudio señalamos la dificultad para entrevistar a los participantes y obtener más información que permitiera contrastar las narrativas. Futuras investigaciones podrían abordar esta limitación mediante métodos alternativos de recopilación de datos.

REFERENCIAS

Ajzen, I. (1988). *Attitudes, personality, and behaviour.* Open University Press.

Bartolini M. G., y Martignone, F. (2014). Manipulatives in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 365–372). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8

Bazán-Ramírez, A., Hernández-Padilla, E., y Castellanos-Simons, D. (2022). Educación y apoyo familiar, y logro en matemáticas en dos contextos sociodemográficos diferentes. *Propósitos y Representaciones*, *10*(1), Artículo e1354. https://doi.org/10.20511/pyr2022.v10n1.1354

Braun V., y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T., y Sabena, C. (2013). Inside teachers' affect teaching as an occasion for math-redemption. In M. S. Hannula, P. Portaankorva-Koivisto, A.

Laine, y L. Näveri (Eds.) *Proceedings of MAVI 17 Conference* (pp. 203–215). Finnish Research Association for Subject Didactics.

Cortés, J., García-González, M., y Martínez, M. (2023). Autoeficacia de estudiantes de posgrado en Matemática Educativa: el caso de México. *Bolema–Boletín de Educación Matemática, 37*(77), 1171–1191. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n77a12

Di Martino, P., Coppola, C., Mollo, M., Pacelli, T., y Sabena, C. (2013). Pre-service primary teachers' emotions: The math-redemption phenomenon. In A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 225–232). PME.

Di Martino, P., y Sabena, C. (2011). Elementary pre-service teachers' emotions: Shadows from the past to the future. In K. Kislenko (Ed.), *Current state of research on mathematical beliefs XVI* (pp. 89–105). Institute of Mathematics and Natural Sciences, Tallinn University

Di Martino, P., y Zan, R. (2010). 'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(1), 27–48. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9134-z

García-González, M. S., y Martínez-Sierra, G. (2020). The history of a teacher's relief of his mathematics anxiety: the case of Diego. *Educational Studies in Mathematics*, *103*(3), 273–291. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09941-8

Gómez-Chacón, I. M., y Marbán, J. M. (2019). Afecto y conocimiento profesional docente en matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 397–416). Ediciones Universidad Salamanca.

Hidalgo, S., Maroto, A., y Palacios, A. (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Educación Matemática*, *17*(2), 89–116.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2015). *Los docentes en México. Informe 2015*. https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2018/12/P1I240.pdf

Jacobson, E., e Izsák, A. (2015). Knowledge and motivation as mediators in mathematics teaching practice: The case of drawn models for fraction arithmetic. *Journal of Mathematics Teacher Education 18*(5), 467–488. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9320-0

Kaasila, R., Hannula, M. S., Laine, A., y Pehkonen, E. (2007). Socio-emotional orientations and teacher change. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 111–123. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9094-0

Martínez-Padrón, O., De Tejada-Lagonell, M., y García-González, M. (2022). Resilience in mathematics learners. *Revista Electrónica Educare, 26*(2*),* 1–20. https://doi.org/10.15359/ree.26-2.25

Martínez-Sierra, G., Arellano-García, Y., Hernández-Moreno, A., y Nava, C. (2019). Daily emotional experiences of a high school mathematics teacher in the classroom: A qualitative experience-sampling method. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17(3), 591–611.* https://doi.org/10.1007/s10763-018-9879-x

Middleton, J. (2020). Motivation in Mathematics Learning. In, S. Lerman (Ed). *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd ed., pp. 635–637). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_117

Ortony, A., Clore, G. L., y Collins, A. (1996). *The cognitive structure of emotions*. (J. Martínez y R. Mayoral, traductores). Siglo XXI. (Trabajo original publicado en 1988)

Quintanilla, V., y Gallardo, J. (2020). Emociones en matemáticas. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *88*(26), 4–6.

Rojas, M. L. (2008). Lo biográfico en sociología. Entre la diversidad de contenidos y la necesidad de especificar conceptos. En M. L. Tarrés (Coord.), *Observar, escuchar y comprender. Sobre la tradición cualitativa en la investigación social* (1ra ed., pp. 171–197). Porrúa.

Rothbauer, P. (2008). Triangulation. In L. M. Given (Ed.). *The SAGE encyclopedia of qualitative research methods* (pp. 892–894). Sage.

Sabena, C., Coppola, C., Di Martino, P., y Pacelli, T. (2015). Crucial event in pre-service primary teachers´ mathematical experience. In K. Beswick, T. Muir, y J. Fielding-Well (Eds.), *Proceedings of the XXXIX Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 201–208). PME.

Secretaría de Educación Pública. (2022). *Marco curricular y plan de estudios 2022 de la educación básica mexicana*. https://revistadgepe.gob.mx/wp-content/uploads/2022/01/1_Marco-Curricular_ene2022.pdf

Stoehr, K. J. (2017). Building the wall brick by brick: One prospective teacher's experiences with mathematics anxiety. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(2), 119–139. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9322-y

Tarrés, M. L. (Coord.). (2008). *Observar, escuchar y comprender. Sobre la tradición cualitativa en la investigación social.* Porrúa.

Autor de correspondencia:
María del Socorro García González

Dirección: Colonia Haciendita II, Código Postal 39086,
Chilpancingo de los Bravo, México
msgarcia@uagro.mx

 https://doi.org/10.24844/EM3603.04

Uso da linguagem algébrica com compreensão: Uma experiência de ensino baseada no Raciocínio Matemático

Using algebraic language with understanding: A teaching experiment based on Mathematical Reasoning

Kelly Aguiar,[1] João Pedro da Ponte,[2]
Marisa Quaresma[3]

Resumo: Este artigo pretende analisar o desenvolvimento do uso da linguagem algébrica com compreensão por alunos de 8º ano, a partir de uma experiência de ensino que promove o raciocínio matemático. Adotando a metodologia de Investigação Baseada em Design e uma perspectiva qualitativa e interpretativa, utilizamos as resoluções escritas e orais de alunos de 8º ano ao resolverem tarefas algébricas. Os resultados mostram que as justificações dos alunos evidenciam os significados que atribuem aos símbolos algébricos, constituindo um valioso apoio para darem significados a partir de diferentes perspetivas. As conjeturas e generalizações formuladas evidenciam para os alunos que a linguagem algébrica tem como valor prático a expressão de relações matemáticas. A valorização do raciocínio matemático dos alunos, no âmbito do uso da linguagem algébrica, mostrou favorecer o desenvolvimento de competências de adoção e interpretação de símbolos algébricos, e contribuir para que os

Fecha de recepción: 29 de julio de 2024. **Fecha de aceptación:** 21 de septiembre de 2024.

[1] Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal, kelly.aguiar@edu.ulisboa.pt, orcid.org/0000-0002-8516-9715

[2] Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal, jpponte@ie.ulisboa.pt, orcid.org/0000-0001-6203-7616

[3] Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal, mq@edu.ulisboa.pt, orcid.org/0000-0002-0861-6016

alunos deem significados aos símbolos e expressões algébricas com base em diversas perspetivas.

Palavras-chave: *Raciocínio matemático. Álgebra. Linguagem algébrica. Sentido de símbolo. Aprendizagem.*

Abstract: This article aims to analyze the development of the use of algebraic language with understanding by grade 8 students, based on a teaching experiment that promotes mathematical reasoning. Adopting the Design-Based Research methodology and a qualitative and interpretative approach, we used the students' written and oral answers when solving algebraic tasks. The results show that students' justifications highlight the meanings they give to algebraic symbols, providing valuable support for making sense of symbols from different perspectives. The conjectures and generalizations formulated show for students that algebraic language has the practical value of expressing mathematical relations. Valuing students' mathematical reasoning, within the scope of the use of algebraic language, proved to favor the development of skills in adopting and interpreting algebraic symbols, and contributing to students making sense of algebraic symbols and expressions based on different perspectives.

Keywords: *Mathematical reasoning. Algebra. Algebraic Language. Symbol Sense. Learning.*

1. INTRODUÇÃO

Desenvolver a compreensão dos símbolos matemáticos formais é um aspeto fundamental na aprendizagem matemática (Lannin *et al.*, 2023). A construção de uma linguagem algébrica que seja significativa para o aluno possibilita o uso dos símbolos algébricos de modo flexível e crítico (Arcavi *et al.*, 2017). Desse modo, a linguagem algébrica pode auxiliar o pensamento na resolução de problemas e na realização de novas aprendizagens. No entanto, usar a linguagem algébrica constitui um desafio para muitos alunos (Arcavi *et al.*, 2017; Jupri, *et al.*, 2021; Kop *et al.*, 2020). Ao estudá-la num contexto distante da expressão de ideias matemáticas, os alunos não compreendem o seu valor prático e apresentam sérias dificuldades em usá-la (Arcavi *et al.*, 2017). Por isso, é necessário que práticas como refletir, questionar, identificar relações, selecionar estratégias, justificar e validar justificações integrem amplamente o processo de aprendizagem da linguagem algébrica (Friedlander y Arcavi, 2017).

Pela relevância de conhecer mais acerca do uso da linguagem algébrica num contexto de valorização destas práticas (Arcavi *et al.*, 2017), realizamos uma investigação com alunos de 8º ano de três escolas em Portugal visando responder à seguinte questão de investigação: *como se desenvolve o uso da linguagem algébrica com compreensão pelos alunos ao longo de uma experiência de ensino baseada na promoção do raciocínio matemático?* Assim, o nosso objetivo é analisar como, no quadro de uma experiência de ensino, ocorre o desenvolvimento do uso da linguagem algébrica com compreensão por alunos de 8º ano.

2. LINGUAGEM ALGÉBRICA E SENTIDO DE SÍMBOLO

A capacidade de formular generalizações é central na aprendizagem da Álgebra (Kieran, 2022), sendo a simbolização uma ferramenta que serve o propósito da generalização (Sibgatullin *et al.*, 2022). Os alunos devem ser capazes de compreender que as expressões algébricas podem comunicar ideias e relações matemáticas e de interpretar os seus significados (Lannin *et al.*, 2023). No entanto, diversas investigações têm mostrado as dificuldades dos alunos neste campo (Arcavi *et al.*, 2017: Sibgatullin *et al.*, 2022) e a sua falta de sentido de símbolo (Jupri *et al.*, 2021; Kop *et al.*, 2020).

Sentido de símbolo é uma noção paralela à de sentido de número e passa pela capacidade de compreender como e quando os símbolos podem ser usados para expressar relações e generalizações (Arcavi, 1994). Compreende uma série de competências ligadas à adoção, interpretação e manipulação de símbolos e o seu desenvolvimento dá-se ao longo da trajetória escolar dos alunos (Arcavi *et al.*, 2017). Tendo em conta que o sentido de símbolo tem grande influência na aprendizagem algébrica (Somasundram, 2021), três destas competências podem ser promovidas explicitamente nos alunos: 1) saber que é possível representar informações com exatidão por meio de expressões simbólicas e ser capaz de as construir; 2) ter consciência da necessidade de ver e rever os significados dos símbolos durante a resolução de um problema; e 3) reconhecer diversos aspetos de um significado a partir de expressões algébricas equivalentes (Arcavi, 1994).

Neste sentido, as práticas de sala de aula devem valorizar a busca do significado dos símbolos e dos diferentes aspetos matemáticos que eles podem evidenciar

(Arcavi *et al.*, 2017). Para Arcavi *et al.* (2017), os alunos devem exercitar a procura pela estrutura expressa por símbolos, a leitura do seu significado e a perceção de seu potencial na resolução de problemas. Lannin *et al.* (2023) afirmam que os alunos devem ter oportunidades de interpretar expressões algébricas, assim como de criar e comparar novas expressões. White *et al.* (2023) também referem a importância de dar significado a expressões algébricas em contexto. Estes autores argumentam que os alunos devem interpretar os significados das expressões algébricas a partir de diferentes perspetivas (White *et al.*, 2023), pelos conceitos, propriedades ou relações matemáticas e pelos procedimentos matemáticos ou rotinas automáticas. Lannin *et al.* (2023) destacam também que as discussões em sala de aula assumem um papel essencial para que os alunos aprofundem a compreensão dos significados dos símbolos algébricos.

3. O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO PARA A APRENDIZAGEM COM COMPREENSÃO

Explorar contextos, analisar relações e padrões, comparar e formular estratégias na experiência com a Álgebra é fundamental para dar-lhe significado (Friedlander y Arcavi, 2017). Dar significado, na atividade matemática, envolve a compreensão de uma situação, contexto ou conceito conectando-o com conhecimento existente (NCTM, 2009). Pelo seu lado, o raciocínio matemático envolve diversos processos, com destaque para a formulação de conjeturas, generalizações e justificações (Lannin *et al.*, 2011). De acordo com o NCTM (2009), abordar conteúdos e tarefas matemáticas valorizando o raciocínio matemático favorece a aprendizagem com compreensão, constituindo um suporte central para que os alunos possam dar significado a objetos e relações matemáticas. Para isso, é fundamental que os alunos sejam incentivados a comunicar suas conjeturas e generalizações, bem como a justificar e validar afirmações (Ponte *et al.*, 2020).

Conjeturar envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que se pensa poderem ser verdadeiras (Lannin *et al.*, 2011). Conjeturas de natureza geral constituem generalizações (Ponte *et al.*, 2020). Para Lannin *et al.* (2011), generalizar inclui pensar sobre uma relação, representação, padrão ou outra propriedade matemática para identificar semelhanças. A formulação de conjeturas, específicas ou gerais, serve como um ponto de entrada para o raciocínio matemático e leva à realização de outros processos (Lannin *et* *al.*, 2011), como a justificação dessas mesmas conjeturas. Justificar é um processo de busca por dados e razões que permitam a mudança do valor epistémico de uma afirmação, para verdadeira ou falsa ou mesmo para mais provável (Jeannotte y Kieran, 2017). Uma justificação é um argumento matemático que suporta uma afirmação a partir de declarações aceites como verdadeiras para uma comunidade, por meio de formas de expressão por ela consideradas válidas (Staples *et al.*, 2012).

Para promover o raciocínio matemático em sala de aula é preciso uma dinâmica de aula e ações do professor que incentivem questionamentos e discussões (Ponte *et al.*, 2020). De acordo com Ponte *et al.* (2020), a aula organizada em três fases (lançamento da tarefa, trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva) pode favorecer a promoção do raciocínio matemático. No quadro 1 descrevemos algumas ações do professor, nestas diferentes fases, que evidenciam e promovem o raciocínio matemático e que decorrem de uma abordagem de ensino exploratória (Ponte, 2005), em que os alunos assumem um papel central na construção do conhecimento.

Quadro 1. Algumas ações do professor para promover o raciocínio matemático

Fase da aula	Ações do professor
Lançamento da tarefa	1. Assegurar que todos os alunos compreendem os termos matemáticos do enunciado; 2. Assegurar que todos os alunos compreendem o contexto; 3. Desenvolver uma linguagem comum para descrever os aspetos essenciais da tarefa;
Trabalho autónomo	1. Acompanhar a resolução da tarefa dando apenas as indicações necessárias, sem reduzir de modo significativo o seu grau de desafio; 2. Para os alunos com dificuldades em formular ou concretizar uma estratégia de resolução, dar sugestões ou colocar questões facilitadoras que os ajudem a chegar por si próprios a uma estratégia;

Fase da aula	Ações do professor
Discussão coletiva	1. Encorajar a partilha de ideias; 2. Explorar desacordos entre alunos, levando-os a argumentar as suas posições; 3. Aceitar e valorizar contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique; 4. Solicitar a explicação do "porquê", a apresentação de justificações de respostas ou estratégias de resolução e a formulação de justificações alternativas; 5. Solicitar aos alunos que identifiquem justificações válidas e inválidas, destacando o que as valida.

Fuente: Adaptado de Ponte *et al.*, 2020.

Outro aspecto fundamental para promover o raciocínio matemático em sala de aula é o uso de tarefas que incentivem a formulação de conjeturas, generalizações e justificações, bem como a realização de outros processos de raciocínio matemático, tais como a comparação e a exemplificação (Ponte *et al.*, 2020). O quadro 2 apresenta seis princípios para a seleção ou elaboração de tarefas que promovam o raciocínio matemático em sala de aula.

Quadro 2. Alguns princípios para a elaboração de tarefas que promovem o raciocínio matemático

Princípios gerais	Princípios específicos
Incluir questões que:	
1. Permitem uma variedade de estratégias de resolução. 2. Envolvem uma variedade de representações. 3. Incentivem e favoreçam a reflexão sobre os processos de raciocínio utilizados.	1. Incentivem a formulação de generalizações. 2. Solicitem ou incentivem a justificação de respostas e de estratégias de resolução. 3. Solicitem a identificação justificada da verdade ou falsidade de afirmações matemáticas, inclusive nas justificações apresentadas por outros alunos.

Fuente: Adaptado de Ponte, 2022.

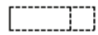
4. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

A investigação apresentada neste artigo assume uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan y Biklen, 1994), seguindo uma metodologia de Investigação Baseada em Design (Cobb *et al.*, 2016). Esta opção metodológica justifica-se pelo propósito de estudar uma intervenção em educação, que busca promover aprendizagens particulares, visando compreender os processos que lhe estão subjacentes (Cobb *et al.*, 2016). O estudo concretizou-se por meio da realização de uma experiência de ensino, em turmas de 8º ano, construída com características específicas a fim de promover o raciocínio matemático dos alunos. Estas características são relativas às tarefas usadas e à dinâmica de aula e inserem-se numa abordagem de ensino exploratório (Ponte, 2005), ou seja, num contexto onde os alunos assumem um papel de destaque na interpretação de questões, na sua resolução e na discussão das soluções. A dinâmica das aulas priorizou oportunizar os alunos a comunicar e refletir em conjunto, entre si e com o professor. Assim, as aulas foram organizadas em três fases e de acordo com as ações do professor sugeridas no quadro 1 e as tarefas foram elaboradas considerando o conjunto de princípios apresentados no quadro 2. A conjetura inicial da investigação é: *uma experiência de ensino que tem como base o ensino exploratório e a promoção do raciocínio matemático, nomeadamente através da realização de conjeturas, generalizações e justificações, apoia o desenvolvimento do uso da linguagem algébrica com compreensão, na aprendizagem de tópicos algébricos.* Além disso, tivemos ainda em conta a importância de valorizar a reflexão sobre os significados dos símbolos (Arcavi *et al.*, 2017) e de criar oportunidades para que os alunos interpretem, criem e comparem expressões algébricas (Lannin *et al.*, 2023).

A experiência de ensino, realizada em três turmas de 8º ano de diferentes escolas em Portugal, foi constituída por seis aulas lecionadas pelas professoras de Matemática de cada turma, aqui designadas por A, B e C. Na fase de planeamento do trabalho, foram realizadas reuniões com cada uma das professoras tendo em vista discutir o que é o raciocínio matemático e como o promover. Nesta fase, os princípios dos quadros 1 e 2 foram amplamente explorados e as tarefas que compunham a experiência de ensino foram analisadas e discutidas com as professoras. O trabalho de sala de aula teve início em novembro de 2021, na turma A; em março de 2022, na turma B; e em outubro de 2022, na turma C, constituindo três ciclos de design. As turmas tinham cerca de 20 alunos cada e os alunos trabalharam em grupos de três ou quatro, mostrando-se participativos na resolução e discussão das tarefas. A maioria das aulas, com duração de 90 minutos, foi dedicada a uma tarefa ou parte, começando com a leitura de toda a tarefa pela professora, seguida pela realização de cada questão autonomamente e, finalmente, pela sua discussão coletiva.

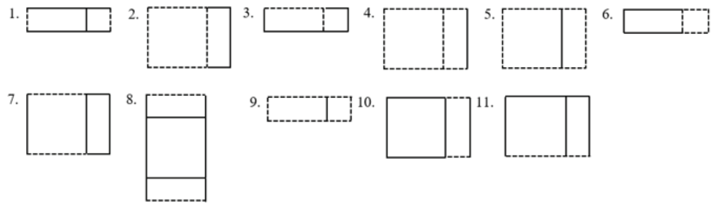
Para atender o objetivo proposto, analisamos respostas e momentos de discussão decorrentes da resolução de duas das tarefas realizadas pelos alunos, as últimas realizadas na experiência de ensino. A seleção destas tarefas decorre da sua realização ter por base todo o trabalho anterior e também pela riqueza do trabalho que proporcionaram, no que refere aos significados atribuídos pelos alunos aos símbolos e expressões algébricas e às competências de sentido de símbolo que puderam praticar na sua resolução e discussão. Ambas as tarefas selecionadas foram elaboradas com características específicas para promover o raciocínio matemático. Para além disso, é também de destacar como inovador o modo como estas tarefas foram conduzidas em sala de aula, guiando os alunos numa trajetória de aprendizagem e descoberta centrada no raciocínio matemático. A primeira tarefa, *Tracejados & Áreas* é composta por duas partes (figura 1 e figura 2), insere-se num contexto de exploração de comprimentos e áreas e visa o uso da linguagem algébrica na criação de expressões, bem como a sua justificação.

1. A figura é construída com segmentos de dois comprimentos distintos. Em sua formação há um quadrado e outro retângulo. Para representar a medida do comprimento total da linha tracejada nesta figura, Pedro escreveu a expressão $2x + 4y$. Explica, a partir da figura, o raciocínio do Pedro, indicando o que podem significar o x e o y.



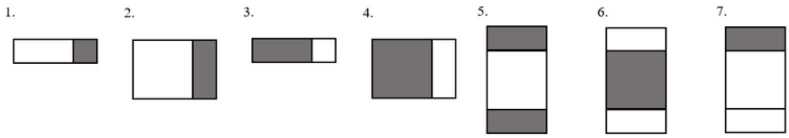
2. As figuras a seguir também são construídas com segmentos de dois comprimentos distintos.

a) Usando x e y, como o Pedro, escreve uma expressão para representar a medida do comprimento total da linha tracejada em cada figura:



b) Identifica todos os pares de figuras cujas linhas tracejadas totalizam a mesma medida. Justifica.

c) Usando x e y, escreve uma expressão para representar a medida da área total sombreada em cada figura:



d) Para representar a medida da área total sombreada na figura, Pedro escreveu a expressão $(x + y)y$ e Rita escreveu a expressão $xy + y^2$. Explica, usando a figura, quem está certo.

e) Escreve duas expressões algébricas para representar a medida da área total sombreada de cada figura. Explica como pensaste para construir cada expressão.

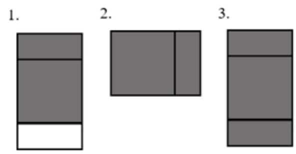
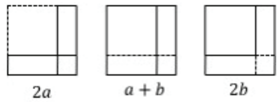


Figura 1. Tarefa Tracejados & Áreas parte I. (Adaptada de Vlassis y Demonty, 2002)

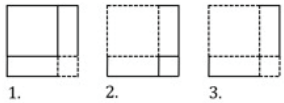
A parte I (figura 1) pretende que os alunos explorem inicialmente o uso dos símbolos para representar diversas medidas de comprimento e área e criem expressões equivalentes. A parte II (figura 2) pretende dar seguimento à criação e análise de expressões algébricas pela comparação, identificação de relações, generalizações a partir de exemplos, justificação e validação de argumentos. O contexto desta tarefa envolve situações de cálculo de medida de área de figuras familiares aos alunos de 8º ano.

Um quadrado foi dividido, obtendo-se dois quadrados menores e outros dois retângulos. As expressões algébricas representam a medida do comprimento total da linha tracejada em cada figura:



a. Qual é a medida do lado de cada um dos quadrados? Justifica cada resposta.

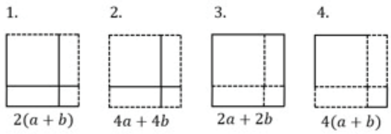
b. Escreve uma expressão algébrica para representar a medida do comprimento total da linha tracejada em cada figura:



Que relação existe entre a medidas expressas nas figuras 1, 2 e 3? Justifica.

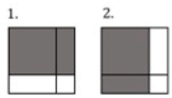
c. Compara as medidas do comprimento total da linha tracejada e as expressões dadas nas figuras. O que podes afirmar acerca das medidas e das expressões?

Qual é o significado dos parênteses nas expressões referentes às figuras 1 e 4? Explica.



d. Escreve uma expressão algébrica que represente a medida da área total sombreada em cada figura. Explica como pensaste.

e. Para a figura 1, Pedro escreveu a expressão $a^2 + ab$ e, para a figura 2, Ana escreveu a expressão $a(a + b)$. Quem está certo? Explica como cada um deles pensou ao elaborar as expressões.



f. Escreve duas expressões algébricas que representem a medida da área total sombreada da figura ao lado.

g. A partir da reflexão acerca das alíneas *e* e *f*, escreve uma generalização acerca de como multiplicar monómio por binómio.

h. Escreve três expressões algébricas que representem a medida da área total sombreada.

i. Para representar a medida da área total sombreada da figura na alínea h, Pedro escreveu a expressão $a(a + b) + b(a + b)$. Pedro está certo? Justifica a tua resposta e explica como o Pedro pensou.

j. Para representar a medida da área total sombreada da figura na alínea h, Ana escreveu duas expressões: $(a + b)^2$ e $a^2 + b^2$. Ana argumentou que estas expressões são equivalentes. Ana está certa? Justifica a tua resposta e explica como a Ana pensou.

Figura 2. Tarefa Tracejados & Áreas parte II (Adaptada de Vlassis y Demonty, 2002).

A segunda tarefa, Duas sequências (figura 3) pretende que os alunos identifiquem padrões de formação, usem a linguagem algébrica para os representar e formulem conjeturas, generalizações e justificações relativamente a relações entre as representações pictóricas e algébricas das sequências. O contexto desta tarefa envolve a observação de sequências de figuras e a identificação de semelhanças e relações.

Sequência A

1.a) Quantos quadrados são necessários para formar a figura na sexta posição? E a figura na décima terceira posição? Explica como encontraste estes números.

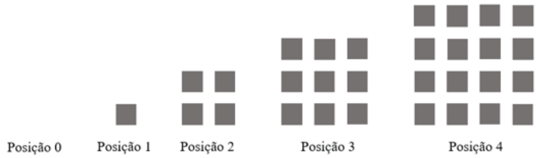
1.b) Escreve uma expressão algébrica para encontrar o número de quadrados necessários para formar a figura na posição *n*. Justifica.

1.c) Discute com os teus colegas, que números são estes. Justifica.

Sequência B

2.a) Quantos quadrados são necessários para formar a figura na sétima posição? E a figura na décima quinta posição? Explica como encontraste estes números.

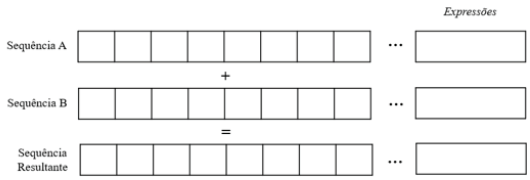
2.b) Escreve uma expressão algébrica para encontrar o número de quadrados necessários para formar a figura na posição *n*. Justifica.



2.c) Discute com os teus colegas, que números são estes. Explica a vossa conclusão.

3.a) Compara as sequências A e B. Qual é a diferença entre elas? Explica.

3.b) Preenche as tabelas com os números que compõe cada sequência e as respetivas expressões algébricas. De seguida soma cada elemento da sequência A ao respetivo elemento da sequência B, e escreve uma expressão algébrica para a sequência resultante.



3.c) Observa a sequência resultante e compara-a com a sequência B. Discute com os teus colegas. Explica a vossa conclusão.

Figura 3. Tarefa Duas sequências (Adaptada de Kindt *et al.*, 2006)

A recolha de dados foi feita pela primeira autora em sala de aula, por meio da observação direta, com recurso a gravação de vídeo e diário de bordo e recolha documental das produções escritas dos alunos. Assim, foram utilizados como dados as produções escritas dos alunos e as transcrições dos momentos de discussão coletiva. Para a análise dos dados, começamos pela sua organização, observação dos registos das produções escritas dos alunos e pela transcrição integral dos áudios das discussões coletivas. A seguir, identificamos os momentos mais significativos das discussões e, por fim, analisamos estas unidades de registo a partir de categorias de análise definidas com base na revisão de literatura. As categorias de análise e suas subcategorias (Quadro 3) fundamentam-se nos processos de raciocínio matemático, nas perspetivas para dar significados aos símbolos e em competências de adoção e interpretação de símbolos.

Quadro 3. Categorias de análise

Dimensão de Análise	Categoria de Análise	Subcategoria	Código
Processos de Raciocínio Matemático	Conjeturas e Generalizações		R1
	Justificações		R2
Perspetiva para dar significados	Contexto da tarefa		S1
	Conceitos e propriedades matemáticas		S2
	Procedimentos		S3
Competências	Adoção de símbolos algébricos	Reconhecer a representação de informações	CA1
		Criar expressões	CA2
	Interpretação de símbolos algébricos	Ver e rever significados	CI1
		Reconhecer aspetos de significados	CI2

Assim, tendo em conta as produções escritas dos alunos e as observações feitas em aula e posteriormente a partir dos vídeos gravados, cada excerto da discussão coletiva selecionado, foi analisado a partir destas categorias e subcategorias (Quadro 3). Buscamos responder se os alunos formularam conjeturas, generalizações e justificações; que perspetivas usaram para dar significados aos símbolos e expressões algébricas e que competências de adoção e interpretação de símbolos exercitaram ou mesmo evidenciaram durante a realização e discussão das tarefas. Ao longo da discussão referimos de que modo estas categorias contribuem para responder ao objetivo proposto. Os resultados são organizados separadamente por tarefa e por momentos de discussão, que constituem partes da resolução das tarefas onde centramos a nossa atenção.

5. RESULTADOS

5.1. Tarefa "Tracejados & Áreas" – Parte I

1.º Momento – Os significados de x e y

A maioria dos alunos usou o contexto da tarefa para apontar as linhas tracejadas representadas pelos símbolos x e y, ou para afirmar que x e y representariam os segmentos de maior e menor comprimento, respetivamente. Entretanto, alguns alunos indicaram outros significados para estes símbolos. O excerto de diálogo da turma B exemplifica outras conjeturas que surgiram nas diferentes turmas:

Filipa:	O x é a altura e o y é o comprimento neste retângulo. E o x também é o lado do quadrado.
Professora B:	A Filipa está certa?
Alunos:	Não!
Professora B:	Porquê?
Timóteo:	Na figura temos duas medidas maiores e quatro menores em linha tracejada.
Maria Clara:	Ela trocou. A medida maior é o x e a medida menor é o y.
Duarte:	Mas o x também poderia ser a linha grande, que é a junção do lado do quadrado com o comprimento do retângulo.
Professora B:	O que acham?
Timóteo:	Só sobravam duas medidas, então o que seria o 4y?
Duarte:	Pois, então não dava!

(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Nas discussões, as justificações dos alunos foram fundamentais para que todos chegassem a um significado único para os símbolos x e y. A partir disto, os alunos passaram a escrever expressões algébricas para representar medidas de comprimento das linhas tracejadas e de área, nas alíneas $2a$ e $2c$, justificando suas expressões e identificando expressões equivalentes. Na figura 4, exemplificamos o que os alunos apresentaram no quadro nas discussões:

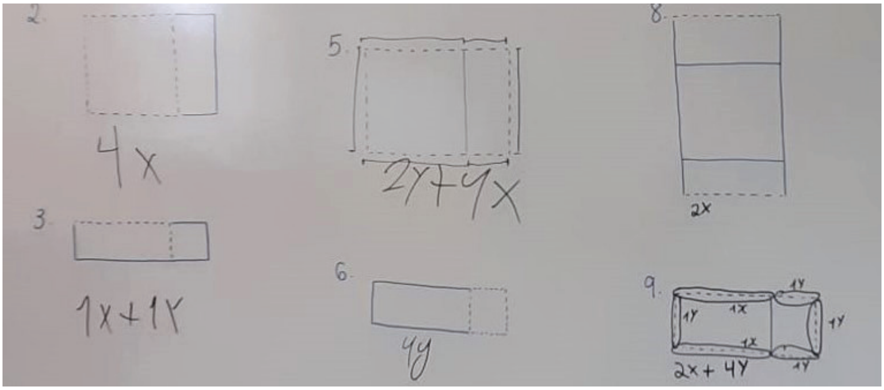


Figura 4. Captura de parte do quadro (Alínea *2a*) na turma A

Os alunos formularam conjeturas e justificações relativamente aos significados dos símbolos (R1 e R2), a partir da expressão $2x + 4y$. Suas perspetivas para dar significado aos símbolos basearam-se no contexto da tarefa pela observação da figura, nos conceitos de adição e multiplicação, ou ainda no procedimento de contagem de segmentos (S1, S2 e S3). Neste primeiro momento, os alunos exercitam competências de adoção e interpretação dos símbolos, pelo exemplo de que $2x + 4y$ representava a situação apresentada (CA1), pela busca e revisão do significado de x e y (CI1), pela criação de várias expressões nas alíneas $2a$ e $2c$ (CA2) e pela identificação de expressões equivalentes e reconhecimento do que cada uma evidenciava (CI2) na alínea $2b$.

2.º Momento – Que expressão é válida?

Ao serem questionados sobre a validade de duas expressões para representar a medida de área de uma figura, na alínea $2d$, a maioria dos alunos respondeu no trabalho autónomo que apenas uma delas era válida, a expressão $xy + y^2$. Na discussão coletiva, entretanto, alguns alunos fizeram novas conexões, como vemos no excerto da discussão na turma B:

Professora B:	Quem é que tem razão?
Filipa:	A Rita, porque a área do retângulo é comprimento vezes largura, mais a área do quadrado que é lado vezes lado! Que dá x vezes y, mais y ao quadrado.
Professora B:	Então, e a expressão do Pedro, $(x + y) \cdot y$?

Matilde: A expressão do Pedro não faz sentido nenhum!
Duarte: Ah! Afinal os dois estão certos porque se aplicarmos a propriedade distributiva fica x vezes y, mais y vezes y, que é y ao quadrado!
Professora B: E o que é o x mais y na expressão do Pedro? Olhem para a figura!
Sarah: Os dois juntos, x mais y, é o comprimento do retângulo mais o lado do quadrado.
Ester: É a medida desta linha toda, como se fosse um retângulo só.
Estevão: Ah, e a largura é o y.
Ester: Então na expressão temos comprimento do retângulo maior vezes a largura!
Duarte: Ah!
Sarah: Ah, agora faz sentido!

(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Vemos que, a partir das justificações de Filipa e Duarte, desenvolveu-se um diálogo de busca por significado para a expressão $(x + y)y$. Mais alunos respondem aos questionamentos, concluindo que ambas as expressões eram válidas. As aprendizagens feitas na discussão desta questão foram essenciais para que os alunos criassem expressões equivalentes na alínea $2e$. Exemplificamos o trabalho feito no quadro (figura 5), com expressões apresentadas na turma A:

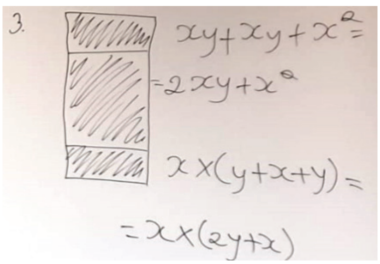


Figura 5. Resposta à alínea *2.e* (Captura do quadro) na Turma A

Os alunos formularam conjeturas e justificações (R1 e R2) sobre a validade das duas expressões $xy + y^2$ e $(x + y)y$. Suas perspetivas para lhes dar significado basearam-se primeiramente no contexto da tarefa e na propriedade da área de retângulo (S1 e S2), indicando que $xy + y^2$ representava a área do retângulo de comprimento x e largura y, mais a área do quadrado de lado y. Duarte baseou-se na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, com ênfase no procedimento realizado (S3), para afirmar que $(x+y)y$ também seria válida. A partir dos questionamentos, os alunos reconheceram que $(x+y)y$ representava a área total do retângulo de comprimento $x+y$ e largura y. Neste momento os alunos exercitaram competências de adoção e interpretação dos símbolos, pelo exemplo de que as duas expressões representavam a situação (CA1), pela busca do significado de ambas as expressões (CI1), pela criação de expressões equivalentes na alínea $2e$ (CA2) e pelo reconhecimento dos diferentes aspetos que cada uma delas evidencia (CI2).

5.2. Tarefa "Tracejados & Áreas" – Parte II

1.º Momento – Comparando medidas e expressões algébricas

A seguir ao trabalho feito na Parte I, os alunos não tiveram dificuldades em atribuir significado aos símbolos e em construir expressões algébricas para representar medidas de comprimento, na alínea b. Ao compararem medidas e expressões dadas na tarefa, na alínea c, os alunos apresentaram suas conjeturas, que exemplificamos com excertos de diálogos das turmas B e C:

Professora B:	O que é que concluíram acerca das medidas?
António:	Que a do primeiro e a do terceiro são iguais, e a do segundo e a do quarto também são iguais.
Professora B:	Então e as expressões?
Martin:	As expressões são equivalentes!
Professora B:	E qual é o significado dos parênteses nas expressões?
Martin:	Professora eu escrevi "usando a propriedade distributiva fica $2a$ mais $2b$ e $4a$ mais $4b$.
Professora B:	Ora, os parênteses é para aplicar a distributiva. Quem tem uma resposta diferente?
Sarah:	Por exemplo, no 1 serve para indicar que o a e o b aparecem duas vezes porque se não tivesse os parênteses seria interpretado de maneira errada.
Timóteo:	Professora, os parênteses indicam um conjunto, por exemplo na figura 1 são dois conjuntos de a mais b!

(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Leonor:	O que está dentro dos parênteses vai multiplicar pelo que está fora.
Professora C:	Outras respostas!
Ana:	Os parênteses servem para separar o número de vezes que aquela medida se repete.
Professora C:	Olhem lá para a primeira figura, veem a medida a mais b? Quantas vezes é que ela se repete?
Leonor:	Ah, duas vezes!

(Turma C, discussão coletiva, novembro de 2022)

As justificações apresentadas apontam para as perspetivas para dar significado às expressões em que os alunos se basearam. A afirmação de que as expressões são equivalentes foi baseada na comparação das medidas nas figuras e das expressões, ou seja, do contexto da tarefa (S1). Relativamente aos parênteses, os significados iniciais relacionavam-se com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, com ênfase no procedimento a realizar (S2 e S3). Timóteo e Ana referiram o contexto e a ideia de multiplicação para perceber o significado aos parênteses e, a partir disto, outros alunos conseguiram dar significado às expressões $2(a+b)$ e $4(a+b)$ no contexto da tarefa, referindo-se a $a+b$ como uma só medida. Neste momento, os alunos exercitaram as competências de adoção dos símbolos, pela criação de expressões na alínea b (CA2) e pelo reconhecimento de que expressões podem representar informações, a partir da observação das expressões e das medidas que representam (CA1). Exercitaram também a revisão de significado, ao buscarem interpretar o uso dos parênteses (CI1) e o reconhecimento de diferentes aspetos de um significado evidenciado pelas expressões equivalentes identificadas (CI2).

2-º Momento – Criando e validando expressões algébricas

Ao longo da tarefa os alunos tiveram a oportunidade de escrever várias expressões algébricas para representar as medidas de área (alíneas d e f) e de analisar a validade de outras expressões (alínea e). Nesta exploração de exemplos, os alunos basearam-se em diferentes perspetivas para dar significado às expressões, nomeadamente, contexto da tarefa, conceitos e propriedades matemáticas e procedimentos. Na alínea h, como resultado das aprendizagens feitas, muitos alunos representaram uma medida de área por meio de várias expressões algébricas, como exemplificamos nos diálogos nas turmas A e C:

Ana: a ao quadrado, mais $2ab$, mais b ao quadrado.
Professora C: Porquê?
Ana: É a área do quadrado grande, mais a área do quadrado pequeno, mais a área do retângulo, duas vezes.
Marta: Fizemos a mais b, entre parênteses, vezes a mais b, entre parênteses também.
Professora C: Esta era muito importante. Como é que pensaram?
Marta: Fizemos a área do quadrado maior, de lado a mais b.

(Turma C, discussão coletiva, novembro de 2022)

Nuno: Eu fiz tudo com uma área só! Porque daqui a aqui é a mais b, e daqui a aqui também é a mais b. Então vai ser o a mais b, vezes o a mais b!
Professora A: Observem, o Nuno multiplicou um número por ele mesmo, o quê que dá?
António: Ao quadrado!

(Turma A, discussão coletiva, janeiro de 2022)

Pelas justificações dadas, vemos que as expressões equivalentes criadas pelos alunos são resultado de diferentes relações matemáticas que eles observaram. Na alínea i, os alunos deveriam validar a expressão $a(a+b)+b(a+b)$ para a mesma figura da alínea h:

Rosa: Eu usei a propriedade distributiva e deu o mesmo, a ao quadrado, que é a área do quadrado grande, ab que é a área dos retângulos e b ao quadrado, que é a área do outro quadrado.
Professora A: Mas se olharmos para a expressão do Pedro, como é que vemos as áreas?
Marcos: Professora, a figura está dividida em duas partes. É a área do lado esquerdo e do lado direito! $a(a+b)$ é a área deste retângulo $b(a+b)$ é a área deste retângulo.
Rosa: Ah, o comprimento é a mais b, depois a largura é a e depois b.

(Turma A, discussão coletiva, janeiro de 2022)

Professora B: Porque é que a expressão do Pedro está bem?
Sarah: Porque o a mais b é o comprimento, vezes a parte de cima, que é o a, depois a mais b multiplicado pelo b, que é a parte de baixo. E assim eu tenho o quadrado todo!

(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Por fim, os alunos deveriam validar as expressões $(a+b)^2$ e a^2+b^2 para esta mesma figura da alínea h. Muitos alunos, ao olharem para as expressões, afirmaram que ambas eram válidas:

Filipa:	Acho que a Ana está certa! Se está com parênteses o expoente é tanto do a como do b. Sem parênteses tem que se pôr o expoente nos dois!
Professora B:	Concordam com a Filipa?
Timóteo:	Eu não! O $a+b$ ao quadrado é a área do quadrado inteiro porque é um lado vezes o outro. Na outra expressão é a área do quadrado médio mais a área do quadrado pequeno, então não é o mesmo!
Filipa:	Ah, faltam os retângulos!

(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

António:	As duas expressões são equivalentes, porque o quadrado fica no a e no b!
Marcos:	Não são equivalentes! Porque $a+b$ ao quadrado corresponde à área toda, e a ao quadrado mais b ao quadrado são só os quadrados de dentro. Então está incompleta!
António:	Ah, tens razão!

(Turma A, discussão coletiva, janeiro de 2022)

Marta:	As expressões não são equivalentes, mas não sei explicar.
Professora C:	Observem lá as expressões que nós escrevemos na alínea h.
Marta:	Ah, ficava a faltar o $2ab$!

(Turma C, discussão coletiva, outubro de 2022)

Neste momento os alunos apresentaram primeiramente as expressões que criaram, que constituem suas conjeturas sobre as medidas de área, justificandoas e argumentaram ainda sobre a validade de outras expressões apresentadas (R1 e R2). Suas justificações mostram novamente em que perspetivas os alunos se basearam para dar significado às expressões. Na criação das expressões estes significados estão baseados no contexto, pela observação da composição visual das figuras e no conceito de área de retângulo (S1 e S2). Já na validação de $a(a+b)+b(a+b)$ e de a^2+b^2, a maioria dos alunos deixou de referir o contexto, baseando-se na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para justificar $a(a+b)+b(a+b)$ e na realização de um procedimento equivocado para justificar a^2+b^2, nomeadamente pela aplicação da potenciação a a e a b para calcular $(a+b)^2$ (S2 e S3). Entretanto, alguns alunos se basearam na composição visual da figura e no conceito de medida de área para dar significado e argumentar sobre a validade destas duas expressões. A discussão coletiva foi fundamental para que outros alunos fizessem novas conexões e dessem significado às expressões a partir do contexto. Relativamente às competências de adoção e interpretação de símbolos, nesta fase final da tarefa, observamos uma maior facilidade na criação de expressões e que estas expressam relações matemáticas observadas pelos alunos (CA2). Há um maior reconhecimento por parte dos alunos que as expressões podem representar situações com exatidão (CA1) e dos diferentes aspetos de um significado evidenciado nas expressões equivalentes (CI2). As várias expressões exploradas levaram os alunos a praticarem não só este reconhecimento como a revisão de significados (CI1), no caso em particular das expressões $a(a+b)+b(a+b)$ e a^2+b^2.

5.3. Tarefa "Duas Sequências"

1.º Momento – Observar e generalizar

Em ambas as sequências, os alunos começaram a resolução procurando semelhanças, testando exemplos e elaborando conjeturas e generalizações. A busca imediata por expressões algébricas que gerassem termos quaisquer das sequências, foi observada no trabalho da maioria dos alunos, o que exemplificamos nos diálogos nas turmas B e C:

> Jorge: Nós fizemos logo uma expressão geral, $2n+1$, e testamos para várias posições.
> Professora C: E como é que chegaram a esta expressão?
> Jorge: 2 é o que era adicionado, então ficou $2n$, e mais 1 porque daria sempre números pares e não os ímpares.
>
> (Turma C, discussão coletiva, outubro de 2022)

> Daniel: Eu fiz a expressão $2n+1$, porque vamos sempre acrescentar mais 2.
> Professora B: Mas, de onde é que vem o mais 1?
> Daniel: É do quadrado que está na quina, na pontinha, no vértice.
> Filipa: Eu disse que é o da posição zero, porque depois é sempre a acrescentar 2.
>
> (Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Martin: Achamos melhor fazer a expressão geradora, que é n ao quadrado! Então a sétima posição é 7 ao quadrado, que é 49. E a décima quinta posição terá 225 quadrados!

Professora B: Quem é que quer explicar o porquê desta expressão geradora?

Leonor: Como são quadrados, posso fazer lado vezes lado, e o lado tem o mesmo número de quadrados da posição em que está!

(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Os alunos observaram regularidades entre o número de quadrados que compõe cada figura e a sua posição, formulando generalizações, como vemos numa observação feita por uma aluna da turma B:

Ester: São sempre ímpares, porque nós fazemos a posição vezes 2 que vai dar sempre um número par, só que aí temos de adicionar a posição 0, que é 1, então vai dar sempre ímpar.

(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Os alunos formularam conjeturas, generalizações e justificações sobre as sequências e os números que elas produziam (R1 e R2). Suas justificações evidenciam as perspetivas em que se basearam para lhes dar significado. No caso da primeira expressão, vimos a observação do contexto por muitos alunos, mas também o uso por outros alunos de um procedimento que consiste em observar o número que está a ser acrescentado de um termo para outro e multiplicá-lo pela ordem, verificando posteriormente o que seria necessário ajustar na expressão (S1 e S3). No caso da segunda expressão, como este procedimento não é válido, os alunos basearam-se no contexto, pela observação da relação entre o termo e a ordem e no conceito de números quadrados (S1 e S2). Relativamente às competências de adoção e interpretação de símbolos, vimos que neste contexto e para estas sequências os alunos já apresentam uma consciência de que é possível representá-las por meio de expressões (CA1) e têm mais facilidade em criá-las (CA2). Houve, por parte de alguns alunos, um exercício de revisão do significado das expressões criadas (CI1), em particular pela discussão do tipo de número que cada sequência produzia. Alguns alunos referiram as expressões $n + n + 1$ e $n \times n$, mas não houve uma exploração dos diferentes aspetos evidenciados nas sequências (CI2).

2.º Momento – Comparar sequências e expressões algébricas

Na comparação das duas sequências, diferentes conjeturas surgiram, mas uma delas foi destacada nas três turmas, o que exemplificamos pelos diálogos a seguir:

Marcos:	Os quadrados da sequência B completam os quadrados da sequência A.
Professora A:	Completam a formar o quê?
Marcos:	Um quadrado perfeito!

(Turma A, discussão coletiva, janeiro de 2022)

Duarte:	Se juntarmos a mesma posição das duas sequências, vamos obter o quadrado que está na próxima posição da sequência B! Eu usei como exemplo a posição 2, mas dá com todas!

(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Depois desta perceção visual das sequências, os alunos exploraram os números que elas resultavam (figura 6), vendo novamente que, ao somar os números das respetivas posições em cada sequência, teriam uma nova sequência de números quadrados perfeitos. Observaram também as expressões algébricas criadas, relacionando-as entre si (figura 6).

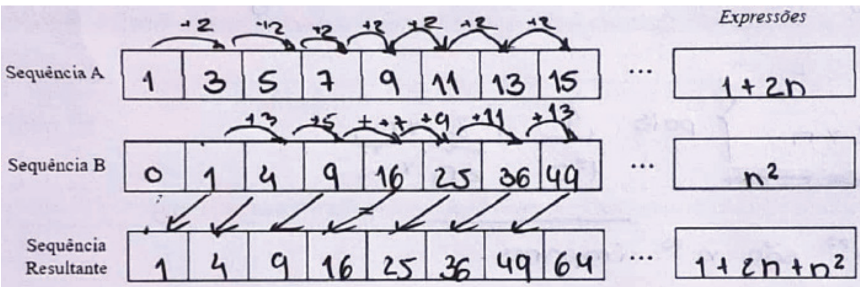


Figura 6. Resolução de uma aluna (Turma B).

No trabalho autónomo, muitos alunos escreveram a expressão $n^2 + 2n + 1$ a partir da consideração de que se adicionassem os respetivos números das sequências A e B, obteriam a sequência resultante. Na alínea c, os alunos compararam a sequência B e a sequência resultante e muitos deles destacaram a diferença relativa ao primeiro termo de cada uma delas. Estes alunos escreveram a expressão $(n+1)^2$ para representar o termo geral da sequência resultante e suas justificações nas discussões coletivas contribuíram para que outros alunos também dessem significado a esta expressão, o que exemplificamos por meio de um diálogo da turma B:

Filipa:	Eu escrevi que a sequência resultante é n mais 1 entre parênteses, ao quadrado.
Professora B:	O quê é este mais 1 da tua expressão?
Filipa:	É a posição que falta.
Ester:	É a posição 0! É o 1 de avanço que uma sequência tem em relação a outra.
Duarte:	Ah, uma é n ao quadrado e a outra é n mais 1, ao quadrado, por causa do 1 de avanço.
Professora B:	Mas voltem lá à alínea b, qual era a expressão resultante?
Sarah:	Era n ao quadrado, mais $2n$, mais 1.
Professora B:	E agora vocês disseram que a sequência resultante é n mais 1, ao quadrado. Estas duas expressões são equivalentes?
Timóteo:	Sim, sabemos pelos desenhos!
Professora B:	Mas só pelos desenhos?
Filipa:	Temos que fazer n mais 1, vezes n mais 1 para ter a certeza! Usar a distributiva!

(Turma B, discussão coletiva, abril de 2022)

Diferentes conjeturas foram apresentadas pelos alunos, apontando e justificando relações entre as sequências A, B e Resultante (R1 e R2). No trabalho autónomo vimos que muitos alunos deram significado à expressão n^2+2n+1 a partir da generalização que formularam a partir do contexto da tarefa (S1). Nas discussões, a expressão $(n+1)^2$ foi sugerida por poucos alunos em cada turma, tendo por base a ideia de sucessor e a generalização feita a partir de n^2 (S2 e S1), e a sua equivalência foi sustentada pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, que estes alunos sabiam aplicar (S2). A partir destas discussões outros alunos conseguiram dar significado a esta expressão. Neste segundo momento, os alunos exercitaram competências de adoção de símbolos pelo exemplo de que n^2+2n+1 e $(n+1)^2$ representava a situação apresentada (CA1) e por estas expressões terem sido criadas por eles a partir de relações observadas (CA2). Os alunos que não pensaram na expressão $(n+1)^2$ exercitaram a busca pelo significado desta expressão durante a discussão (CI1) e os que conseguiram criá-la demonstraram reconhecer aspetos diferentes evidenciados pelas expressões equivalentes (CI2).

6. DISCUSSÃO

Na realização destas tarefas, e ao longo de toda a experiência de ensino, observamos o envolvimento dos alunos na formulação e justificação de conjeturas e generalizações e que isto foi potenciado pelos princípios para a promoção do raciocínio matemático (Ponte *et al.*, 2020), pilares da experiência de ensino. A partir destes processos realizados, analisamos o uso da linguagem algébrica pelos alunos no quadro desta experiência, de acordo com o objetivo proposto. Nesta análise consideramos dois aspetos centrais: as perspetivas em que os alunos se baseiam para dar significado aos símbolos e expressões algébricas (S1, S2 e S3) e as competências de adoção e interpretação de símbolos que praticaram ou evidenciaram (CA1, CA2, CI1 e CI2). A seguir discutimos os resultados no que concerne a cada aspeto e de que modo eles estão relacionados no desenvolvimento do uso da linguagem algébrica com compreensão.

Relativamente às perspetivas usadas pelos alunos para dar significado aos símbolos, é preciso destacar primeiramente que a experiência de ensino buscou que os alunos refletissem sobre estes significados, como indicado por Friedlander y Arcavi (2017), promovendo e destacando tais momentos de reflexão. Destacamos também que a ideia de que os alunos podem dar significado aos símbolos a partir de diferentes perspetivas, apontada por White *et al.* (2023), foi fundamental na análise conduzida.

A formulação de conjeturas a partir da exploração do contexto das tarefas foi fundamental para que os alunos dessem significados aos símbolos e expressões algébricas (Lannin *et al.*, 2023) e suas justificações orais colocaram estes significados em evidência, favorecendo a discussão de ideias diferentes e a realização de novas conexões (NCTM, 2009). Na realização das tarefas os alunos usaram diferentes perspetivas para dar significados aos símbolos – contextos, conceitos e propriedades matemáticas e procedimentos (S1, S2 e S3). Vimos tanto situações em que os alunos referiam apenas uma perspetiva, como situações em que eles referiam mais de uma perspetiva, articulando-as. Observamos, entretanto, uma inclinação por parte da maioria dos alunos de se basear apenas na perspetiva procedimental para dar significado a expressões de maior complexidade, principalmente no caso de expressões com parênteses. Ao discutirem $(x+y)\cdot y$ e $a(a+b)+b(a+b)$, por exemplo, muitos alunos não apontaram inicialmente aspetos encontrados no contexto, mas deram ênfase ao procedimento a realizar pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Tal como White *et al.* (2023), vimos que ao usarem mais do que uma perspetiva para dar significado aos símbolos (S1, S2 e S3), os alunos chegaram a uma maior compreensão dos símbolos e expressões algébricas. Em particular, dar significado a uma expressão no contexto e articulá-la com as perspetivas dos conceitos, propriedades e procedimentos mostra-se essencial para a compreensão dos símbolos algébricos, como vimos por exemplo na discussão acerca das expressões $(a + b)^2$ e $a^2 + b^2$. Neste aspeto, observamos que as conjeturas, generalizações e justificações assumem um papel fundamental para que os alunos perspetivem o significado de expressões tanto no seu contexto, como destacam Lannin *et al.* (2023), como a partir de outras perspetivas, como apontam White *et al.* (2023).

No que concerne às competências de adoção e interpretação de símbolos, destacamos que a experiência de ensino considera a importância de criar oportunidades para que os alunos interpretem, criem e comparem expressões algébricas, tal como indicam Lannin *et al.* (2023). Neste cenário, vimos os alunos explorarem paralelamente a interpretação e a adoção dos símbolos ao longo das tarefas, praticando a competência de ver e rever os significados dos símbolos e expressões (CI1). Este aspeto foi evidenciado, em particular, pelas justificações apresentadas pelos alunos e pelas discussões em torno da validação de outras expressões. Por meio da ampla exploração do contexto e da formulação de conjeturas, os alunos exercitaram o reconhecimento de diferentes aspetos de um significado evidenciados por expressões equivalentes (CI2) e assim avançaram com mais facilidade para a criação de expressões (CA2), identificando e expressando relações matemáticas (Arcavi *et al.*, 2017; Lannin *et al.*, 2023), inclusive por meio de expressões equivalentes. Naturalmente, algumas destas expressões revelaram conceções erróneas dos alunos, situações nas quais as justificações orais e a argumentação entre os alunos ajudaram a clarificar os erros, proporcionando a realização de novas conexões (Ponte, 2022). Relativamente ao reconhecimento de que expressões algébricas podem representar com exatidão situações dadas (CA1), vimos que os alunos praticaram esta competência no contexto da tarefa "Tracejados e Áreas", avançando gradualmente nesta competência. No contexto da tarefa de sequências, entretanto, observamos que os alunos já reconhecem que as expressões podem representar as informações dadas e que usá-las é uma boa estratégia (CA1). Neste contexto, esta competência está mais desenvolvida e relacionamos este resultado com o facto deste tópico ser bastante explorado no currículo de Matemática dos anos anteriores. Salientamos que as conjeturas e generalizações formuladas pelos alunos ao longo das tarefas favoreceram a perceção da linguagem algébrica como um meio para expressar relações matemáticas, pela comunicação de ideias matemáticas que eles mesmos observaram, conjeturaram e testaram (Ponte *et al.*, 2020).

Considerando a questão de investigação proposta, observamos ao longo da experiência de ensino realizada e em particular das tarefas analisadas neste artigo, que a promoção do raciocínio matemático e as consequentes conjeturas, generalizações e justificações formuladas pelos alunos, favorecem o desenvolvimento do uso da linguagem algébrica com compreensão. As justificações dos alunos evidenciam os significados que atribuem aos símbolos e expressões algébricas, constituindo uma valiosa ferramenta para a realização de novas conexões e para a atribuição de novos significados aos símbolos algébricos, em particular pela articulação de diferentes perspetivas (S1, S2 e S3). Estas justificações favorecem a perceção de significado a partir de contexto, conceitos e procedimentos mesmo diante da predominância inicial da perspetiva procedimental assumida pelos alunos em expressões algébricas mais complexas. As conjeturas e generalizações feitas são essenciais na busca pelos significados dos símbolos e evidenciam para os alunos o valor prático da linguagem algébrica para expressar relações matemáticas. Deste modo, evidencia-se que a promoção do raciocínio matemático pode contribuir para o desenvolvimento gradual de competências de adoção e interpretação dos símbolos ao longo do trabalho dos alunos (CA1, CA2, CI1 e CI2).

7. CONCLUSÃO

Os resultados deste estudo indicam que a valorização do raciocínio matemático contribui para que os alunos deem significados aos símbolos e expressões algébricas com base em múltiplas perspetivas, nomeadamente, contexto da tarefa, conceitos, propriedades matemáticas e procedimentos, favorecendo o desenvolvimento do uso da linguagem algébrica com compreensão. Mostram ainda que, neste ambiente, os alunos praticaram competências de adoção e interpretação de símbolos algébricos, a partir tanto da exploração dos contextos das tarefas, que levou à formulação de conjeturas e generalizações, como das discussões coletivas, que produziram justificações e validações. Embora isto se tenha concretizado de formas distintas nos alunos, os pilares da experiência de ensino – a promoção do raciocínio matemático e o ensino exploratório – conduziram a que estas competências de sentido de símbolo ficassem em evidência na realização e discussão das tarefas.

A realização e análise de uma experiência de ensino com base em princípios para promover o raciocínio matemático dos alunos (Ponte *et al.*, 2020) na aprendizagem da linguagem algébrica com compreensão constitui um dos principais contributos de investigação deste artigo. A análise de perspetivas usadas pelos alunos para dar significado aos símbolos e as competências de adoção e interpretação dos símbolos por eles praticadas ao realizarem as tarefas contribui para uma maior compreensão do tema do uso da linguagem algébrica, com implicações para o ensino. Por fim, destacamos que futuros estudos contemplando diferentes tópicos algébricos ao longo de um ou mais anos escolares poderão ajudar a saber em que medida os alunos podem se tornar mais autónomos na realização de raciocínios matemáticos para dar significado aos símbolos e expressões algébricas e quais as implicações disso para a sua aprendizagem.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é financiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através da Bolsa de Doutoramento 2020.08843.BD e da UIDEF - Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação, UIDB/04107/2020, https://doi.org/10.54499/UIDB/04107/2020.

REFERÊNCIAS

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24–35.

Arcavi, A., Drijvers, P., & Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra: Ideas, insights and activities.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315545189

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto Editora.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. Em L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3 ed., pp. 481–503). Routledge.

Friedlander, A., & Arcavi, A. (2017). *Tasks and competencies in the teaching and learning of algebra.* NCTM.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics volume, 96*, 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Jupri, A., Sispiyati, R., & Chin, K. (2021). An investigation of students algebraic proficiency from a structure sense perspective. *Journal on Mathematics Education, 12*(1), 147–158. https://doi.org/doi.org/10.22342/jme.12.1.13125.147-158

Kieran, C. (2022). The multidimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education, 54*(1), 1131–1150. https://doi.org/doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Kindt, M., Roodhardt, A., Dekker, T., Wijers , M., Spence, M., Simon, A., Pligge, M., & Burrill, J. (2006). Patterns and figures. In Wisconsin Center for Education Research, & Freudenthal Institute, *Mathematics in Context.* Encyclopedia Britannica.

Kop, P., Janssen, F., Drijvers, P., & van Driel, J. (2020). The relation between graphing formulas by hand and students' symbol sense. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 137–161. https://doi.org/doi.org/10.1007/s10649-020-09970-3

Lannin, J., Austin, C., & Geary, D. (2023). Developing meaning for mathematical expressions. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12, 116*(8), 598–603. https://doi.org/10.5951/MTLT.2022.0234

Lannin, J., Ellis, A.B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. NCTM.

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making.* NCTM.

Ponte, J.P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM.

Ponte, J.P. (2022). *Raciocínio matemático e formação de professores.* Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. http://reason.ie.ulisboa.pt/produtos/

Ponte, J.P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática*, 7–11.

Sibgatullin, I., Korzhuev, A., Khairullina, E., Sadykova, A., Baturina, R., & Chauzova, V. (2022). A systematic review on algebraic thinking in education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(1), 1–15. https://doi.org/doi.org/10.29333/ejmste/11486

Somasundram, P. (2021). The role of cognitive factors in year five pupils' algebraic thinking: A structural equation modelling analysis. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(1), 1–12. https://doi.org/doi.org/10.29333/ejmste/9612

Staples, M., Bartlob, J., & Thanheise, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifacted role in middle grades mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 447–462.

Vlassis, J., & Demonty, I. (2002). *A álgebra ensinada por situações-problemas.* Instituto Piaget.

White, I., Foster, M., & Lobato, J. (2023). Making sense of algebraic expressions in context. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12, 116*(8), 604–612. https://doi.org/10.5951/MTLT.2022.0196

Autor de correspondencia:
KELLY AGUIAR
Dirección: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa,
Alameda da Universidade, 1649-013 Lisboa.
kelly.aguiar@edu.ulisboa.pt

 https://doi.org/10.24844/EM3603.05

El razonamiento estadístico en el currículo de formación inicial del profesor de matemáticas de educación secundaria en México

Statistical reasoning in the initial training curriculum for secondary education mathematics teachers in Mexico

Miguel Ángel Verástegui Gutiérrez,[1] José Iván López-Flores,[2]
Jaime I. García-García[3]

Resumen: En los últimos años, en estudios en Educación Matemática se reporta la necesidad de atender la formación estadística de los futuros profesores de matemáticas. El objetivo de esta investigación es explicar la forma en cómo se propone el desarrollo del razonamiento estadístico en la formación del profesorado de matemáticas de educación secundaria en México. El estudio se enmarca en una metodología cualitativa, descriptiva e interpretativa. Con la técnica de análisis de contenido se analizan los programas de estudio de los cursos de formación de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria, vinculados a Estadística y Probabilidad. El marco referencial está formado por ideas del modelo de Ambiente de Aprendizaje para el Razonamiento Estadístico, las Ideas Estadísticas Fundamentales y el informe de Educación Estadística para el Profesorado. Los resultados revelan la presencia de los elementos esenciales del razonamiento estadístico durante la

Fecha de recepción: 15 de septiembre de 2023. **Fecha de aceptación:** 5 de julio de 2024.

[1] Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ), México, mavg.1604@hotmail.com, https://orcid.org/0009-0003-4916-783X.

[2] Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ), México, jlopez@uaz.edu.mx, https://orcid.org/0000-0003-2350-2647.

[3] Departamento de Matemática, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE), Chile, jaime.garcia@umce.cl, https://orcid.org/0000-0002-8799-5981.

formación del profesor. Por ello, se concluye que se favorece el desarrollo del razonamiento estadístico de los futuros profesores. Como aporte, se presentan categorías e indicadores para identificar la presencia de aspectos esenciales que promuevan el razonamiento estadístico en los futuros profesores.

Palabras clave: *análisis curricular. Educación estadística. Educación secundaria. Formación del profesor. Razonamiento estadístico.*

Abstract: In recent years, studies in Mathematics Education have reported the need to address the statistical training of future mathematics teachers. The objective of this research is to explain how the development of statistical reasoning is proposed in the training of secondary mathematics teachers in Mexico. The study is framed in a qualitative, descriptive and interpretative methodology. With the content analysis technique, the study programs of the training courses of the Bachelor's Degree in Teaching and Learning of Mathematics in Secondary Education, linked to Statistics and Probability, are analyzed. The referential framework is formed by ideas from the Statistical Reasoning Learning Environment model, the Fundamental Statistical Ideas and the Statistical Education of Teachers report. The results reveal the presence of the essential elements of statistical reasoning during teacher education. Therefore, it is concluded that the development of statistical reasoning of future teachers is favored. As a contribution, categories and indicators are presented to identify the presence of essential aspects that promote statistical reasoning in future teachers.

Keywords: *Curricular analysis. Statistics education. Secondary education. Teacher training. Statistical reasoning*

1. INTRODUCCIÓN Y PROBLEMÁTICA

En los últimos años, la estadística ha tomado un lugar esencial en el desarrollo académico y profesional del ciudadano, ganando terreno en los currículos escolares de diferentes países y generando un notable aumento de artículos científicos, revistas y congresos relacionados con su didáctica (García-García, 2021). Fue en marzo de 1989 cuando el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (*National Council Teachers of Mathematics*) propone la inserción de la estadística en el currículo de matemáticas en los diferentes niveles educativos (Vásquez y Cabrera, 2022), lo cual influyó para que otros países como México (Secretaría de Educación Pública [SEP]), Perú (Ministerio de Educación [MINEDU]) y Chile (Ministerio de Educación [MINEDUC]), incorporaran contenidos disciplinares en sus programas de estudio (García-García, 2021). Lo anterior conlleva a que el profesor de matemáticas posea un conocimiento disciplinar y didáctico de la estadística.

La literatura especializada reporta al respecto de la formación de los profesores en estadística diversos retos, entre ellos, el diseño de lecciones didácticas por parte del profesor (Gómez-Blancarte y Sánchez, 2008), el cambio de paradigma en la formación de los docentes (Pfannkuch y Ben-Zvi, 2011; Micheli, 2010), el desarrollo de la alfabetización estadística (Alsina *et al.*, 2020) y del razonamiento y pensamiento estadístico, así como de las ideas estadísticas fundamentales, siendo el razonamiento estadístico un componente importante y fundamental en la formación del profesorado (Estrella, 2017). De esta forma, el conocimiento disciplinar y didáctico del profesor se vuelve una preocupación e interés para la comunidad investigativa; ya que, como señalan Vásquez y Alsina (2022), es necesario que los profesores que tienen la tarea de enseñar estadística cuenten con tales conocimientos para llevar a cabo el diseño de actividades que fomenten el desarrollo de la alfabetización estadística.

Al respecto, Batanero (2000) reporta la débil formación de los docentes de matemáticas para la enseñanza de esta disciplina, y señala que los contenidos estadísticos se presentan al final de los programas de estudio en los currículos escolares, por lo que el profesor no siempre logra abordarlos en el aula. Esto ha impactado en el aprendizaje de los estudiantes (Batanero, 2004), ya que no cuentan con los conocimientos ni competencias necesarias vinculadas a la estadística.

Leiria *et al.* (2015) señalan que son pocos los estudios que se han desarrollado en torno al conocimiento estadístico del profesor. Algunos de estos son los de Estrada *et al.* (2004), Marchant y Su (2021) y Advincula *et al.* (2022), donde se expone la presencia de errores conceptuales y dificultades en los profesores en formación.

Por otro lado, la formación continua de los profesores en servicio sobre la enseñanza de la estadística se ha tratado de atender en diferentes países como Argentina, Colombia, Chile y México, a partir de cursos de actualización y talleres formativos con el propósito de expandir su conocimiento y desarrollar su razonamiento estadístico, entre otros aspectos (Pinto *et al.*, 2018). Por ejemplo, en México se han realizado cursos donde se aborda la estrategia de estadística con proyectos (EstPro), la cual se presenta como una propuesta para la formación del profesorado (Pinto, 2022).

En este sentido, es importante observar la formación inicial del profesorado, la cual necesita ser indagada por la comunidad de investigadores (Andrade *et al.*, 2017) y valorar la idoneidad de esta formación para los retos que implica enseñar estadística. Dicha formación debe de caracterizarse por el desarrollo del pensamiento estadístico y la comprensión conceptual (Estrella, 2017). De manera que, durante su formación inicial, es esencial que se conceptúe a la estadística como una herramienta de indagación y resolución de problemas reales (Zapata-Cardona y González, 2017). Además, la formación del profesor debe ser especializada, contemplar el área disciplinar y un conocimiento profundo de cómo promover el aprendizaje de los conceptos estadísticos en el alumnado, incorporando herramientas tecnológicas que favorezcan el análisis de los datos (Zamora *et al.*, 2022).

Es así como la enseñanza de los docentes demanda programas curriculares desde un enfoque orientado a los datos y su interpretación, que les permita a los estudiantes diseñar y realizar investigaciones en contexto, desarrollando elementos de razonamiento y pensamiento estadístico (Clemente y Gómez-Blancarte, 2022). Con respecto a las ideas estadísticas fundamentales (IEF), estas son indispensables para el desarrollo del razonamiento estadístico en la formación de los estudiantes y de los profesores de matemáticas (Estrella, 2017).

Una investigación sobre programas de estudio de formación de profesores de matemáticas es la de Clemente y Gómez-Blancarte (2022), donde se analiza el proceso de transformación curricular del programa de la asignatura "Tratamiento de la Información" del Plan de Estudios (2018). Sin embargo, Hernández *et al.* (2013) afirman que la investigación en educación estadística en torno a la formación del profesorado es un área en pleno crecimiento en México. Atendiendo a este señalamiento, este trabajo tiene por objetivo explicar la forma en cómo se propone el desarrollo del razonamiento estadístico en la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria, desde el análisis de los programas de estudio de los cursos obligatorios vinculados a la estadística que se imparten en las Escuelas Normales de México; ya que estos son los que cursan los futuros docentes durante sus estudios.

2. REFERENTES TEÓRICOS

Para esta investigación consideramos los componentes del Modelo de Entorno de Aprendizaje de Razonamiento Estadístico (*Statistical Reasoning Learning Enviroment* [SRLE]) (Ben-Zvi, 2011), el informe de Educación Estadística para el Profesorado (*Statistical Education of Teachers* [SET]) (Franklin *et al.*, 2015) y las Ideas Estadísticas Fundamentales [IEF] (Burrill y Biehler, 2011). La razón de esta integración es por la necesidad de analizar el contenido tanto disciplinar como didáctico en los programas de estudio, en ese sentido, estos modelos se complementan.

2.1. Ideas Estadísticas Fundamentales

Según Bianchini (2022), las IEF se encuentran presentes en la mayoría de las situaciones en las que se aplica la estadística, por lo que su comprensión es necesaria para enfrentarse con éxito a dichas situaciones. Además, señala que pueden ser enseñadas con diversos niveles de formalización, siendo accesibles en los diferentes niveles educativos. Existen diversas posturas acerca de las IEF, por ejemplo, las propuestas por Watson *et al.* (2013), Burrill y Biehler (2011), y Garfield y Ben-Zvi (2008), cuya diferencia radica en el nivel educativo al que se refieren (Salcedo, 2019).

En este estudio, adoptamos la propuesta de Burrill y Biehler (2011) por considerarla adecuada para la educación secundaria. Estos autores proponen siete IEF (figura 1) a partir de los criterios de Heymann (2003) para las ideas fundamentales en matemáticas y los criterios de Heitele (1975) para las ideas estocásticas fundamentales:

IEF-1. Datos: incluye el trabajo con los datos como números en contexto. Se incluye la descripción de estos, las diferentes formas de recopilarlos, organizarlos y, su medición.

IEF-2. Variación: consiste en identificar y medir la variabilidad para predecir, explicar o controlar. Describir el efecto total del cambio.

IEF-3. Distribución: incluye nociones de tendencia y dispersión que son fundamentales para razonar sobre variables estadísticas de distribuciones empíricas, variables aleatorias de distribuciones teóricas y resúmenes en distribuciones de muestreo.

IEF-4. Representación: implica representaciones gráficas o de otro tipo que revelan historias en los datos, incluida la noción de transnumeración.

IEF-5. Relaciones de asociación y modelado entre dos variables: es una idea que implica la naturaleza de las relaciones entre variables estadísticas para datos categóricos y numéricos, incluida la regresión para modelar asociaciones estadísticas.

IEF-6. Modelos de probabilidad para procesos de generación de datos: destaca la modelización de relaciones estructurales de grandes conjuntos de datos, cuantificación de la variabilidad de los datos, incluida la estabilidad a largo plazo.

IEF-7. Muestreo e inferencia: contempla la relación entre las muestras y la población, y la esencia de decidir qué creer a partir de cómo se recopilan los datos para sacar conclusiones con cierto grado de certeza.

2.2. Ambiente de Aprendizaje para el Razonamiento Estadístico (SRLE)

De acuerdo con Ben-Zvi y Garfield (2004, p.1), el razonamiento estadístico (RE) es "la forma en que las personas razonan con ideas estadísticas y dan sentido a la información estadística", lo que implica 1) realizar interpretaciones basadas en datos, representaciones gráficas y resúmenes estadísticos; 2) hacer conexiones entre conceptos estadísticos (por ejemplo, centro y variabilidad); 3) combinar ideas sobre los datos y el azar; y 4) comprender y explicar procesos estadísticos e interpretar resultados.

El RE es considerado como un nivel cognitivo en el aprendizaje de la estadística (Ramos, 2019). Para su desarrollo es indispensable implicarse en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, abordando las IEF (Estrella, 2017). Además, debe propiciarse un ambiente de investigación donde el estudiante tenga la oportunidad de pensar y reflexionar sobre su aprendizaje, así como discutir y reflexionar la información estadística con sus coetáneos. En este sentido, pueden ponerse en juego los elementos que propone Ben-Zvi (2011) en el modelo denominado Ambiente de Aprendizaje de Razonamiento Estadístico (*Statistical Reasoning Learning Enviroment* [SRLE]), a través de los seis principios pedagógicos que lo componen:

1) centrarse en desarrollar la comprensión de las ideas estadísticas fundamentales, en el sentido de que ayuden al estudiantado a motivarlos y guiarlos a su aprendizaje;

2) usar conjuntos de datos reales y motivadores para involucrar a los estudiantes en probar conjeturas e inferencias estadísticas, tomar decisiones y evaluar la información;
3) el uso de actividades de clase basadas en la investigación colaborativa, considerando promover la interacción y la discusión con los datos;
4) la integración de herramientas tecnológicas (computadoras, calculadoras gráficas, internet, softwares estadísticos y subprogramas de web) que permitan a los alumnos probar sus conjeturas, así como explorar y analizar datos de forma interactiva;
5) promover normas en el aula que incluyan el discurso estadístico y argumentos centrados en ideas estadísticas significativas; y
6) el uso de métodos de evaluación alternativos para identificar cómo se desarrolla el aprendizaje estadístico de los estudiantes, considerando no solo cuestionarios, tareas y exámenes, sino también proyectos estadísticos, análisis de información, entre otros.

En efecto, los seis principios pedagógicos del SRLE son los elementos clave para el progreso de este ambiente en el que el alumnado haga y pruebe sus conjeturas mediante el uso de los datos, la discusión en el aula y explicar su razonamiento estadístico, centrándose en las ideas estadísticas fundamentales.

2.3. Informe de Educación Estadística para el Profesorado (SET)

El SET (Franklin *et al.*, 2015) conforma la colaboración entre matemáticos, estadísticos, educadores matemáticos y educadores estadísticos con el fin de proponer una serie de recomendaciones referentes a la formación de los profesores para la enseñanza efectiva de la estadística en los diferentes niveles escolares. Establece que durante la formación estadística de los futuros profesores se debería modelar una pedagogía efectiva, enfatizando en el desarrollo del razonamiento estadístico y la comprensión de los conceptos clave (Franklin *et al.*, 2015), fundamentalmente centrada en los siguientes objetivos: 1) el desarrollo del conocimiento del contenido y las habilidades de razonamiento estadístico para la implementación de los contenidos establecidos por el currículo de nivel secundaria; 2) el desarrollo de la comprensión de la inserción de los conceptos estadísticos en las diferentes etapas escolares, así como las conexiones con otras áreas temáticas, incluidas las matemáticas; 3) el desarrollo del conocimiento didáctico necesario para la enseñanza de la estadística. Con base en lo expuesto, adoptamos los objetivos que propone el SET ya que considera aspectos clave sobre el conocimiento didáctico y del contenido estadístico para formar a los profesores de nivel secundaria. Además, dichos objetivos aportan los lineamientos necesarios para el desarrollo del razonamiento estadístico.

2.4. Conexión entre el SRLE y SET

Como pudimos observar, ambos modelos favorecen el desarrollo del razonamiento estadístico durante la formación inicial del profesor, por lo que consideramos una conexión entre los principios pedagógicos del SRLE con el conocimiento didáctico de la estadística que se enmarca en los objetivos del SET (figura 1).

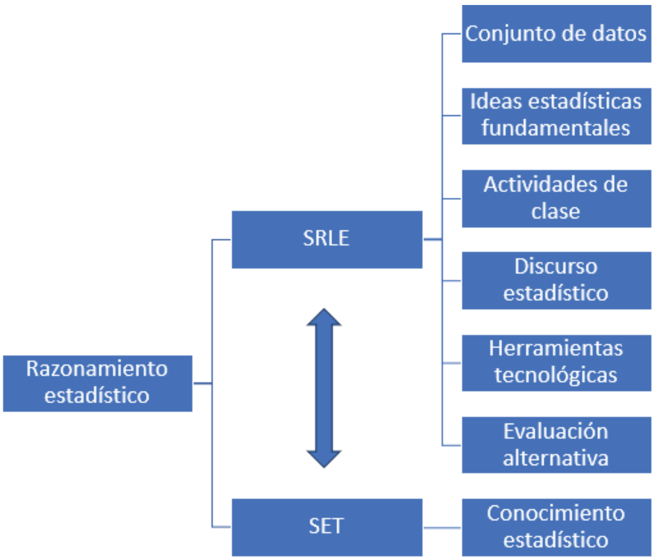


Figura 1. Conexiones entre el SRLE y el SET.

Fuente: elaboración propia.

3. METODOLOGÍA

Este estudio se enmarca en una metodología cualitativa, de tipo descriptiva e interpretativa (Hernández *et al.*, 2014), enfocada en el análisis de contenido de los elementos del razonamiento estadístico en el currículo de la formación del profesor de matemáticas.

3.1. Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria

En México, el plan de estudios de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria (LEAMES) rige la formación del profesorado de matemáticas, también conocidos como "profesores normalistas" (ver Figura 2). Dicha formación se imparte en las Escuelas Normales (Dirección General de Educación Superior para Profesionales de la Educación [DGESPE], 2018).

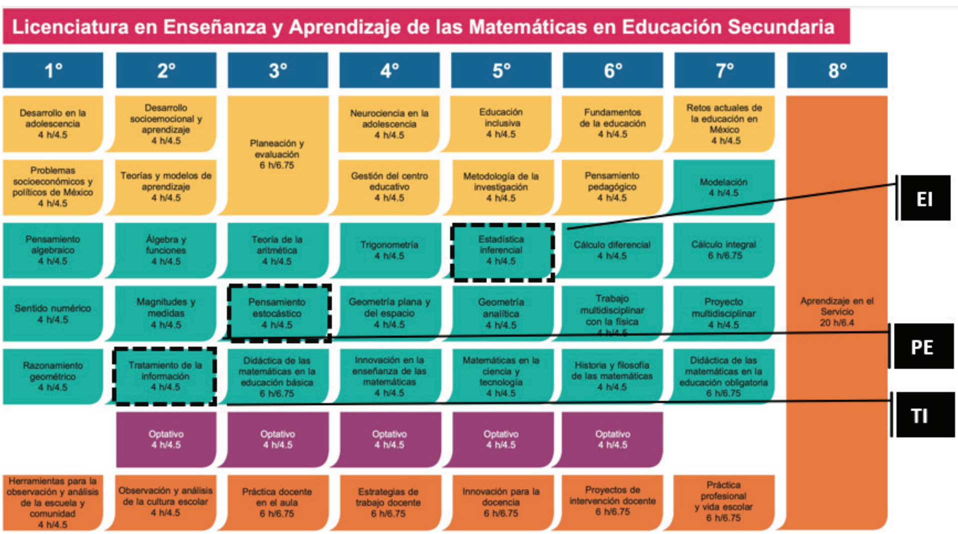


Figura 2. Plan de estudios de la LEAMES.

Fuente: DGESPE (2018).

El plan de estudios de la LEAMES contempla tres cursos (de carácter obligatorio) vinculados con la estadística y la probabilidad: Tratamiento de la Información (TI), Pensamiento Estocástico (PE) y Estadística Inferencial (EI); en segundo, tercero y quinto semestre, respectivamente.

3.2. Análisis de contenido (AC)

El análisis de contenido (AC) es una técnica de investigación que se utiliza en el estudio objetivo y sistemático de diferentes tipos de documentos (Bernete, 2013). Además de ser una técnica descriptiva a interpretativa, considera un procedimiento lógico, conocido como inferencia, lo que permite transitar de una etapa de descripción de las características de un texto hacia la etapa de interpretación, de tal forma que se expliquen los significados de esas características. Las fases de estudio del análisis de contenido según Bernete (2013), así como los componentes correspondientes, se detallan a continuación:

Fase 1. Trabajo previo a la obtención de los datos. Con base en el objetivo planteado en este estudio, se eligieron los documentos a analizar (tabla 1), los cuales son los programas de estudio vinculados a la estadística y la probabilidad de la LEAMES, vigentes a la fecha en que se realizó el estudio. Dichos documentos conforman las unidades de muestreo, donde se analizan las competencias (de aprendizaje, profesionales y disciplinares), el propósito, los contenidos, las actividades de aprendizaje, evidencias, criterios de evaluación, bibliografía (básica y complementaria), sitios web y recursos de apoyo, de las unidades de aprendizaje que conforman cada programa.

Tabla 1. Programas de estudio y unidades de aprendizaje.

Programas de estudio	Unidades de aprendizaje		
	Unidad I	Unidad II	Unidad III
Tratamiento de la Información [TI] (SEP, 2018)	Elementos de análisis cuantitativo	Distintas tendencias de medida	Distribuciones de probabilidad
Pensamiento Estocástico [PE] (SEP, 2019)	Fundamentos de la probabilidad	Teoría de la probabilidad	Introducción a los procesos estocásticos de variable aleatoria continua y discreta
Estadística Inferencial [EI] (SEP, 2020)	Muestreo	Distribuciones de probabilidad	Pruebas de hipótesis

Fuente: elaboración propia.

Fase 2. Extracción de los datos. En esta fase se diseñó un instrumento para la recolección de los datos. Para esto, se elaboró un libro de códigos (tabla 2), donde se encuentran las categorías e indicadores, a partir de los seis principios pedagógicos del modelo SRLE (Ben-Zvi, 2011), las siete IEF de Burrill y Biehler (2011) y los objetivos planteados en el informe SET para los futuros docentes de educación secundaria (Franklin *et al.*, 2015).

Tabla 2. Libro de códigos.

RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO					
Categorías	**Indicadores**				
Ideas Estadísticas Fundamentales (IEF)	**IEF-1.** Incluye datos en contexto, su recopilación y medición.	**IEF-2.** Incorpora la variación para describir el efecto de cambio de la variabilidad.	**IEF-3.** Comprende la distribución, tendencia y dispersión para razonar variables estadísticas.	**IEF-4.** Integra representaciones, gráficas o de otro tipo que revelan datos, incluida la transnumeración.	
	IEF-5. Contempla relaciones de asociación y modelado entre dos variables estadísticas y la regresión.	**IEF-6.** Incluye modelos de probabilidad para procesos de generación de datos.	**IEF-7.** Considera el muestreo, la inferencia y la población.		
Conjunto de datos (CD)	**CD-1.** Se promueve el uso de datos reales para hacer y probar conjeturas e inferencias estadísticas.	**CD-2.** Se toman en cuenta los datos como el centro del aprendizaje estadístico.	**CD-3.** Se consideran los diferentes métodos de recopilación y producción de datos.	**CD-4.** Se especifica cómo los métodos de recolección de datos afectan la calidad de los datos y el tipo de análisis que son apropiados.	
Actividades de clase (AC)	**AC-1.** Se promueven actividades de investigación colaborativa.	**AC-2.** Se promueven situaciones problema que propicien la investigación, colaboración, interacción, y discusión de los datos.	**AC-3.** Se promueve la formulación de conjeturas sobre un problema o un conjunto de datos.		
Herramientas tecnológicas (HT)	**HT-1.** Se promueve la formulación de conjeturas, exploración y análisis de los datos mediante la tecnología.	**HT-2.** Se usa la tecnología para generar estadísticas, graficar y/o analizar datos.	**HT-3.** Se contempla la tecnología para la visualización de conceptos y comprensión de ideas.		
Discurso estadístico (DE)	**DE-1.** Se promueven argumentos centrados en ideas estadísticas en contexto.	**DE-2.** Se propicia el discurso estadístico a partir de la integración de la tecnología.	**DE-3.** Se promueve la explicación de los fenómenos que se investiga.		
Evaluación (E)	**E-1.** Se incluyen diferentes herramientas de evaluación.	**E-2.** Se contemplan proyectos para evaluar.	**E-3.** La evaluación está alineada a los objetivos de aprendizaje.	**E-4.** Se promueve retroalimentación del aprendizaje.	
Conocimiento didáctico (SET)	**SET-1.** Se fomenta el conocimiento didáctico para la enseñanza de la estadística.	**SET-2.** Se familiariza con las características de los estudiantes.	**SET-3.** Se contemplan estrategias para la enseñanza de la estadística.	**SET-4.** Se proponen estrategias para evaluar el conocimiento estadístico.	**SET-5.** Se integra la tecnología para desarrollar conceptos estadísticos.

Fuente: elaboración propia.

Fase 3. Explotación de los datos. En esta última fase del AC, llevamos a cabo el análisis de las unidades de muestreo, la interpretación y descripción del RE en los programas de estudio de la formación estadística del profesor, con base en los indicadores establecidos el libro de códigos. Lo anterior se puede observar a detalle en la siguiente sección.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados obtenidos a partir del análisis de contenido de los documentos que fueron considerados como unidades de muestreo; es decir, los programas de estudio de los cursos (de carácter obligatorio) vinculados a la estadística y la probabilidad.

4.1. Tratamiento de la información

El curso TI se caracteriza por fomentar la reflexión en el futuro profesor sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de la estadística y proponer el RE como uno de los elementos esenciales para la autoformación futura de todos los individuos, considerando cualidades como el saber reconocer la necesidad de los datos, la transnumeración, la percepción de la variación, el razonamiento con modelos estadísticos y la integración de la estadística en contexto (SEP, 2018). En la figura 3 pueden observarse actividades que se proponen en el programa del curso TI, donde se señala la presencia de algunos de los elementos que conforman el RE.

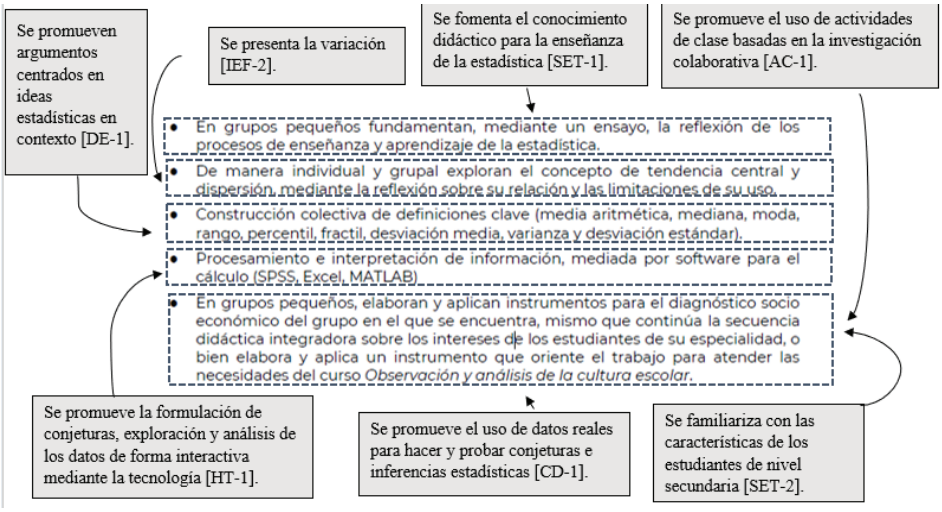


Figura 3. Actividades propuestas en el programa del curso TI

Fuente: construida a partir de información del programa del curso TI (SEP, 2018, p. 23).

En el programa del curso TI encontramos presentes algunas IEF; por ejemplo, los datos (IEF-1) en las actividades que implican su recopilación (en este caso, intereses de los estudiantes), los cuales se solicita ser sistematizados. Las representaciones también se encuentran presentes (IEF-4) ya que se contempla el uso de gráficos y tablas estadísticas para representar información cuantitativa y cualitativa. La variación (IEF-2) se trabaja de forma que los futuros profesores de matemáticas recurran a las medidas de tendencia central y de dispersión para la explicación de los fenómenos cotidianos y la toma de decisiones. Sin embargo, notamos la ausencia de una de las IEF: Relaciones de asociación y modelado entre dos variables (IEF-5).

En el programa se abarcan diferentes métodos de recopilación y producción de datos (CD-3), así como discriminar entre ellos para ver cuál es más pertinente en la interpretación de datos (CD-4). Además, se promueve el uso de actividades basadas en investigación colaborativa, ya que se propone que los futuros profesores diseñen, apliquen y analicen una encuesta socioeconómica, dirigida para los estudiantes de nivel secundaria (AC-1), en este sentido, se fomenta el uso de datos reales (CD-1). En la tecnología se propone el procesamiento e interpretación de datos mediante SPSS, Excel y MATLAB (HT-1).

A partir de la información y recopilación de los datos, se promueve la elaboración de argumentos por parte del profesor en formación, centrados en ideas estadísticas en contexto (DE-1), así como la explicación de las diferentes percepciones sobre fenómenos (DE-3).

Con respecto a la evaluación, se consideran diferentes instrumentos, tales como: ensayo reflexivo, portafolio físico y digital, diagnóstico socioeconómico, entre otros (E-1). Asimismo, encontramos que los criterios de evaluación están alineados a los objetivos de aprendizaje y contenidos de cada una de las unidades de aprendizaje (E-3).

En cuanto al conocimiento didáctico (SET), se encuentran presentes dos indicadores, por ejemplo, durante el curso se fomenta dicho conocimiento mediante reflexiones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística por parte de los docentes en formación (SET-1); además, se familiarizan con las características del estudiantado (SET-2).

En la tabla 3 puede observarse un resumen de la presencia de los diferentes indicadores en el programa de estudio del curso TI.

Tabla 3. Resultados del análisis en el programa del curso TI

Unidad / Indicador	Ideas estadísticas fundamentales	Conjunto de datos	Actividades de clase	Herramientas tecnológicas	Discusión en clase	Evaluación	Conocimiento didáctico
Unidad 1 Elementos de análisis cuantitativo	**IEF-1**	**CD-1**	**AC-1**	**HT-1**	**DE-1**	**E-1**	**SET-1**
	IEF-2						
	IEF-3	**CD-2**	**AC-2**	**HT-2**	**DE-2**	**E-2**	**SET-2**
	IEF-4				**DE-3**		**SET-3**
	IEF-5	**CD-3**	**AC-3**	**HT-3**		**E-3**	**SET-4**
	IEF-6						**SET-5**
	IEF-7	**CD-4**				**E-4**	
Unidad 2 Distintas tendencias de medida	**IEF-1**	**CD-1**	**AC-1**	**HT-1**	**DE-1**	**E-1**	**SET-1**
	IEF-2						
	IEF-3	**CD-2**	**AC-2**	**HT-2**	**DE-2**	**E-2**	**SET-2**
	IEF-4				**DE-3**		**SET-3**
	IEF-5	**CD-3**	**AC-3**	**HT-3**		**E-3**	**SET-4**
	IEF-6						**SET-5**
	IEF-7	**CD-4**				**E-4**	
Unidad 3 Distribuciones de probabilidad	**IEF-1**	**CD-1**	**AC-1**	**HT-1**	**DE-1**	**E-1**	**SET-1**
	IEF-2						
	IEF-3	**CD-2**	**AC-2**	**HT-2**	**DE-2**	**E-2**	**SET-2**
	IEF-4				**DE-3**		**SET-3**
	IEF-5	**CD-3**	**AC-3**	**HT-3**		**E-3**	**SET-4**
	IEF-6						**SET-5**
	IEF-7	**CD-4**				**E-4**	

Fuente: elaboración propia.

En general, consideramos que las actividades que se proponen en el programa del curso TI fomentan un RE en los futuros profesores de matemáticas, en el sentido de que resuelven situaciones problema enfocadas en el análisis de la información, la recopilación y presentación de los datos, la discusión a partir de argumentos estadísticos, entre otras habilidades que se favorecen en pro de su RE. Sin embargo, las categorías: herramientas tecnológicas y conocimiento didáctico tienen poca presencia, respecto a los indicadores que se hacen notar, es decir, se le da poca relevancia al uso de tecnología y al conocimiento necesario para la didáctica de la estadística.

4.2. Pensamiento estocástico

El curso PE fundamenta la práctica profesional del futuro profesor a partir de la comprensión de los estocásticos para la resolución de problemas, propiciando un entorno de enseñanza-aprendizaje sobre el pensamiento estocástico (SEP, 2019). En la figura 4 pueden observarse algunas actividades del programa del curso PE, donde se señala la presencia de algunos de los elementos que conforman el RE.

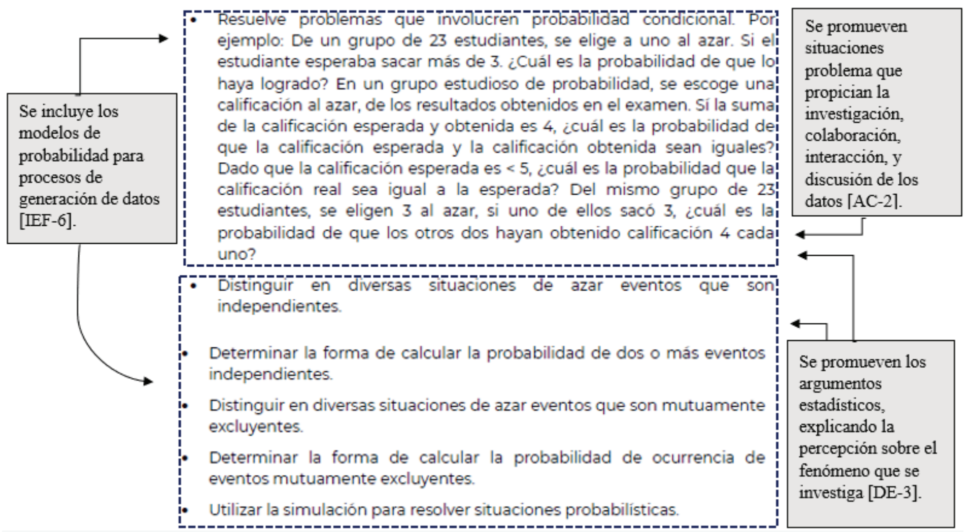


Figura 4. Actividades propuestas en el programa del curso PE

Fuente: construida a partir del programa del curso PE (SEP, 2019, pp. 31-32).

A lo largo del curso PE notamos la presencia de algunas IEF, tales como los datos (IEF-1), representaciones (IEF-4), y probabilidad (IEF-6). La IEF-6, es la más destacada en este curso, dado que se revisan temas correspondientes a la teoría de la probabilidad como: la probabilidad clásica, eventos mutuamente excluyentes y la regla de la suma, el teorema de Bayes, etc. En adición, se articula la combinatoria, la estadística y la probabilidad con el fin de facilitar el estudio de una situación modelada.

El uso de los datos es limitado, debido a que solo logramos identificar una actividad donde se promueve el uso de los datos reales para realizar y probar conjeturas, de forma que, a partir de juegos de azar y situaciones aleatorias es que se obtienen datos (CD-1).

Las actividades de clase propuestas consisten en el planteamiento de problemas y realizar experimentos aleatorios que implican la probabilidad frecuencial, teórica y condicional, de manera que se promueven situaciones que propician la investigación, colaboración, interacción y discusión de los datos (AC-2). A partir de estas actividades puede ser trabajado el discurso estadístico, de forma que se promuevan argumentos estadísticos para la explicación de las percepciones sobre los fenómenos que se investigan (DE-3).

Una de las categorías destacadas es la incorporación de la tecnología para la formulación de conjeturas, exploración y análisis de los datos (HT-1), como lo son las hojas electrónicas de cálculo, juegos de azar virtuales, softwares dinámicos, videos educativos, sitios web y aplicaciones didácticas, así como el uso de calculadoras graficadoras. De esta forma, los diferentes recursos pueden ser contemplados para la visualización de conceptos y a la comprensión de ideas abstractas (HT-3) como para la generación de gráficos (HT-2). Además, se promueve el discurso estadístico a partir de la integración de herramientas tecnológicas (DE-2).

Los criterios de evaluación están alineados a los objetivos de aprendizaje y a los contenidos del curso PE (E-3). De la misma forma, la evaluación es alternativa, ya que se consideran diferentes evidencias como el portafolio (digital y electrónico), la recopilación de juegos de azar y problemas relacionados con la estocástica (E-1).

También, se favorece el conocimiento didáctico para la enseñanza de la estadística en el futuro profesor (SET-1) a partir de la elaboración de ensayos sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad, la combinatoria y el razonamiento inductivo. Así como la integración de la tecnología, como el software GeoGebra, para desarrollar conceptos estadísticos (SET-5).

En la tabla 4 se puede observar un resumen de la presencia de los diferentes indicadores en el programa de estudio del curso PE.

Tabla 4. Resultados del análisis en el programa del curso PE

Unidad / Indicador	Ideas estadísticas fundamentales	Conjunto de datos	Actividades de clase	Herramientas tecnológicas	Discusión en clase	Evaluación	Conocimiento didáctico
Unidad 1 Fundamentos de la probabilidad	**IEF-1**	**CD-1**	**AC-1**	**HT-1**	**DE-1**	**E-1**	**SET-1**
	IEF-2						
	IEF-3	**CD-2**	**AC-2**	**HT-2**	**DE-2**	**E-2**	**SET-2**
	IEF-4				**DE-3**		**SET-3**
	IEF-5	**CD-3**	**AC-3**	**HT-3**		**E-3**	**SET-4**
	IEF-6						**SET-5**
	IEF-7	**CD-4**				**E-4**	
Unidad 2 Teoría de la probabilidad	**IEF-1**	**CD-1**	**AC-1**	**HT-1**	**DE-1**	**E-1**	**SET-1**
	IEF-2						
	IEF-3	**CD-2**	**AC-2**	**HT-2**	**DE-2**	**E-2**	**SET-2**
	IEF-4				**DE-3**		**SET-3**
	IEF-5	**CD-3**	**AC-3**	**HT-3**		**E-3**	**SET-4**
	IEF-6						**SET-5**
	IEF-7	**CD-4**				**E-4**	
Unidad 3 Introducción a los procesos estocásticos de variable aleatoria continua y discreta	**IEF-1**	**CD-1**	**AC-1**	**HT-1**	**DE-1**	**E-1**	**SET-1**
	IEF-2						
	IEF-3	**CD-2**	**AC-2**	**HT-2**	**DE-2**	**E-2**	**SET-2**
	IEF-4				**DE-3**		**SET-3**
	IEF-5	**CD-3**	**AC-3**	**HT-3**		**E-3**	**SET-4**
	IEF-6						**SET-5**
	IEF-7	**CD-4**				**E-4**	

Fuente: elaboración propia.

De manera general, podemos establecer que el programa curso PE fomenta el RE de los futuros profesores, de manera que identificamos la mayoría de las IEF, como actividades de clase que pueden ser aprovechadas para el trabajo con datos reales que propicien el discurso estadístico, la colaboración e interacción entre coetáneos. También, se contemplan recursos tecnológicos, con el fin de reflexionar sobre la enseñanza-aprendizaje de los estocásticos. No obstante, se observa poca presencia de indicadores relacionados con la categoría conjunto de datos, lo cual podría deberse a que el curso se enfoca primordialmente en el estudio de fundamentos teóricos de la probabilidad (donde el enfoque clásico predomina más que el frecuencial), y con la categoría conocimiento didáctico, al centrase más en lo disciplinar.

4.3. Estadística inferencial

El curso EI busca que el futuro profesor establezca hipótesis estadísticas acerca de los comportamientos de poblaciones y muestras en contextos, tanto sociales como escolares, así como utilizar la inferencia estadística como una metodología de iniciación a la investigación en la práctica docente. En la figura 5 se expone una actividad de aprendizaje del programa del curso EI, donde es posible observar la presencia de algunos elementos vinculados al RE.

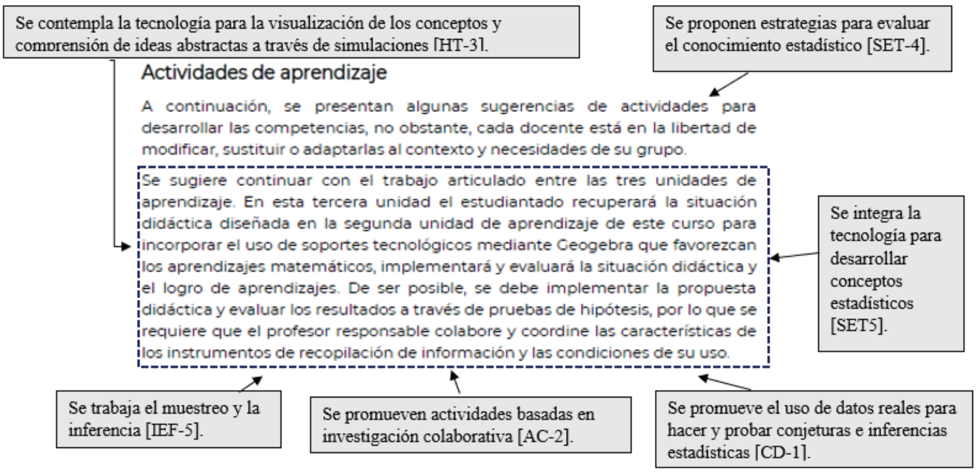


Figura 5. Actividades propuestas en el programa del curso EI

Fuente: construida a partir del programa del curso EI (SEP, 2020a, p. 40).

Al analizar el programa de estudio del curso EI, identificamos la presencia de todas las IEF, como las relaciones de asociación y modelado entre variables (IEF-5), cuya idea no se había presentado en los programas de los cursos previos (TI y PE), de tal forma que se trabaja la regresión lineal y correlación. Otra de las ideas a destacar es la de muestreo e inferencia (IEF-7), ya que en el curso EI se abordan contenidos estadísticos como muestras representativas y tipos de muestreo.

El trabajo con datos se promueve desde el uso de datos reales para hacer y probar conjeturas e inferencias estadísticas (CD-1); por ejemplo, los futuros profesores realizan un análisis estadístico a partir de los resultados de evaluación de los aprendizajes logrados por los estudiantes de nivel secundaria. En este sentido, las actividades de clase propuestas promueven la investigación colaborativa (AC-1), así como la formulación de conjeturas sobre un problema o un conjunto de datos (AC-3), debido a que se propone realizar estudios experimentales para el análisis del efecto de una variable independiente.

Además, en el programa se señala el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra, con la finalidad de visualizar conceptos y comprender ideas abstractas a través de simulaciones (HT-3). En suma, se propone el uso de la tecnología por el futuro profesor para desarrollar conceptos estadísticos en sus estudiantes de nivel secundaria (SET-5).

A partir de las diferentes actividades propuestas en el programa de estudio, se puede abrir paso a una discusión entre los futuros profesores donde se promuevan argumentos estadísticos para explicar fenómenos (DE-3); por ejemplo, una de las actividades consiste en analizar los promedios obtenidos por dos grupos de estudiantes, donde se examina si la diferencia entre sus medias aritméticas es estadísticamente significativa.

Los criterios de evaluación establecidos en cada una de las unidades de aprendizaje están alineados a los objetivos de aprendizaje y los contenidos temáticos del curso EI (E-3). Además de que se promueve la retroalimentación de manera que sea útil y oportuna con la finalidad de conducir el aprendizaje del futuro profesor de matemáticas (E-4).

En el programa de estudio de EI se establecen estrategias para evaluar el conocimiento estadístico (SET-4), ya que, a través del diseño de secuencias didácticas para la enseñanza de la estadística, se propone evaluar el conocimiento estadístico del estudiante de secundaria, así como el análisis de sus resultados de evaluación para conocer sus características de aprendizaje (SET-2).

En la tabla 5 presentamos de manera general la presencia de los indicadores identificados en el programa del curso EI.

Tabla 5. Resultados del análisis en el programa del curso EI

Unidad / Indicador	Ideas estadísticas fundamentales	Conjunto de datos	Actividades de clase	Herramientas tecnológicas	Discusión en clase	Evaluación	Conocimiento didáctico
Unidad 1 Muestreo	IEF-1	CD-1	AC-1	HT-1	DE-1	E-1	SET-1
	IEF-2						
	IEF-3	CD-2	AC-2	HT-2	DE-2	E-2	SET-2
	IEF-4				DE-3		SET-3
	IEF-5	CD-3	AC-3	HT-3		E-3	SET-4
	IEF-6						SET-5
	IEF-7	CD-4				E-4	
Unidad 2 Distribuciones de probabilidad	IEF-1	CD-1	AC-1	HT-1	DE-1	E-1	SET-1
	IEF-2						
	IEF-3	CD-2	AC-2	HT-2	DE-2	E-2	SET-2
	IEF-4				DE-3		SET-3
	IEF-5	CD-3	AC-3	HT-3		E-3	SET-4
	IEF-6						SET-5
	IEF-7	CD-4				E-4	
Unidad 3 Pruebas de hipótesis	IEF-1	CD-1	AC-1	HT-1	DE-1	E-1	SET-1
	IEF-2						
	IEF-3	CD-2	AC-2	HT-2	DE-2	E-2	SET-2
	IEF-4				DE-3		SET-3
	IEF-5	CD-3	AC-3	HT-3		E-3	SET-4
	IEF-6						SET-5
	IEF-7	CD-4				E-4	

Fuente: elaboración propia.

A la luz de los resultados, consideramos que el curso EI aporta al RE del futuro profesor de matemáticas, otorgándole las herramientas esenciales que provee la estadística inferencial para la prueba de hipótesis y el análisis estadístico en situaciones reales. Además, se favorece el conocimiento didáctico del docente en formación, de forma que a partir de su RE reflexione acerca de su práctica en el aula, así como la mejora de esta. En general, a diferencia de los programas de estudio de TI y PE, el curso EI presenta menor ausencia de indicadores en cada una de las categorías.

5. CONCLUSIONES

Estudiar los programas de formación del profesor de matemáticas nos ha permitido analizar el desarrollo del RE en el futuro docente desde el análisis de los programas de estudio. En la tabla 6 se muestran los indicadores en cada uno de los cursos analizados.

Tabla 6. El RE en los programas de los cursos de formación estadística del profesor de matemáticas

Unidad / Indicador	Ideas estadísticas fundamentales	Conjunto de datos	Actividades de clase	Herramientas tecnológicas	Discusión en clase	Evaluación	Conocimiento didáctico
Tratamiento de la Información (TI)	IEF-1	CD-1	AC-1	HT-1	DE-1	E-1	SET-1
	IEF-2						
	IEF-3	CD-2	AC-2	HT-2	DE-2	E-2	SET-2
	IEF-4				DE-3		SET-3
	IEF-5	CD-3	AC-3	HT-3		E-3	SET-4
	IEF-6						SET-5
	IEF-7	CD-4				E-4	
Pensamiento estocástico (PE)	IEF-1	CD-1	AC-1	HT-1	DE-1	E-1	SET-1
	IEF-2						
	IEF-3	CD-2	AC-2	HT-2	DE-2	E-2	SET-2
	IEF-4				DE-3		SET-3
	IEF-5	CD-3	AC-3	HT-3		E-3	SET-4
	IEF-6						SET-5
	IEF-7	CD-4				E-4	
Estadística Inferencial (EI)	IEF-1	CD-1	AC-1	HT-1	DE-1	E-1	SET-1
	IEF-2						
	IEF-3	CD-2	AC-2	HT-2	DE-2	E-2	SET-2
	IEF-4				DE-3		SET-3
	IEF-5	CD-3	AC-3	HT-3		E-3	SET-4
	IEF-6						SET-5
	IEF-7	CD-4				E-4	

Fuente: elaboración propia.

De la información de la tabla 6 podemos concluir que en el curso EI se fortalece el RE, debido a que la mayoría de los indicadores se encuentran presentes; mientras que en los cursos PE y TI, algunos indicadores están ausentes. Por ejemplo, IEF-5 (asociación y modelado entre dos variables estadísticas) no se presenta en TI y PE, debido a que estos cursos se focalizan en el estudio de datos de una sola variable. En el caso de la categoría conjunto de datos, el programa PE carece de los indicadores CD-2, CD-3 y CD-4, esto podría deberse a que el curso se enfoca básicamente en el estudio de los fundamentos teóricos de la probabilidad, por lo que su objetivo no está en la recolección y procesamiento de datos. En este mismo programa, se observa la ausencia de AC-1 (actividades de investigación colaborativa), posiblemente porque PE se enfoca en el estudio de fenómenos aleatorios.

Las herramientas tecnológicas tienen poca presencia en TI; esta ausencia (HT-2 y HT-3) es relevante, debido a que en el curso se abordan diversas técnicas y métodos para el procesamiento y análisis de los datos, por lo que consideramos necesaria la inclusión de recursos tecnológicos como softwares estadísticos para fortalecer estas capacidades. Otra categoría con indicadores ausentes es el conocimiento didáctico; en TI solo se presentan SET-1 y SET-2, y en PE se observa la ausencia de SET-2. Por lo anterior, consideramos esencial la incorporación de actividades relacionadas con esta categoría, tales como el diseño de propuestas de enseñanza y de evaluación, teniendo en cuenta los recursos tecnológicos, así como el análisis de las posibles dificultades que pueden presentar los estudiantes de educación secundaria al abordar contenidos estadísticos y probabilísticos.

Por otro lado, en el programa EI se observa la ausencia de CD-4 y E-2; para ello, sugerimos el desarrollo de un proyecto integrador (como una investigación estadística) donde los futuros profesores prueben hipótesis a partir de una muestra aleatoria de datos recolectados, y con ello, la evaluación de dicho proyecto.

En conclusión, en la formación inicial de los profesores de matemáticas, a partir de los cursos de TI, PE y EI, se promueven todos los elementos del RE (conjuntos de datos, actividades de clase, herramientas tecnológicas, discurso estadístico, evaluación y conocimiento didáctico), los cuales son necesarios para el desarrollo del RE en el futuro profesor de matemáticas durante su formación inicial. Dicho razonamiento se amplia a través de poner en juego todas las IEF (datos, variación, representación, distribución, modelos de probabilidad, relaciones de asociación y modelado entre dos variables y, muestreo e inferencia), lo que permite que el docente razone y dé sentido a la información estadística, así como la explicación y comprensión de los procesos estadísticos.

Durante su formación, se estipula que el profesor recolecte, organice, analice y presente datos reales, además de utilizar y discriminar entre los métodos para el procesamiento y presentación de la información que tiene a la mano durante su proceso formativo. En suma, diseña y aplica instrumentos para la recolección de datos, como es el caso del diagnóstico socioeconómico que se elabora en el curso TI.

Las actividades que trabaja el profesor durante su formación, según los programas de estudio, consisten en: a) resolver problemas, b) analizar situaciones problemas en contexto, c) construir definiciones de conceptos, d) investigar en colaboración con sus compañeros, e) realizar juegos de azar y llevar a cabo experimentos aleatorios, f) recopilar problemas que implican los estocásticos, g) diseñar secuencias didácticas, h) analizar estadísticos, entre otras. De esta forma, se propicia un entorno de aprendizaje estadístico que abre paso a la discusión mediante argumentos estadísticos.

Durante algunas de las actividades propuestas en los programas, se incorporan herramientas tecnológicas para la recolección, procesamiento y presentación de la información, la realización de cálculos tediosos, comprensión de los conceptos estadísticos y para la enseñanza de la estadística. Por ejemplo, se considera el uso de hojas electrónicas de cálculo, GeoGebra y videos de YouTube. No obstante, creemos importante ampliar los recursos tecnológicos, de manera que se integren algunos otros como Fathom, TinkerPlots, CODAP y PhET; además de proporcionar al futuro profesor simulaciones de GeoGebra predeterminadas, con la finalidad de que este pueda implementarlas en el aula con sus estudiantes.

Los programas revisados dan cuenta de que se evalúa su aprendizaje con diferentes evidencias como son: proyectos, la resolución de problemas, el trabajo colaborativo, examen escrito, diseño de propuestas didácticas, entre otros. Además de que los criterios de evaluación establecidos en los cursos de formación estadística están alineados a los objetivos de aprendizaje y los contenidos temáticos.

Al analizar los programas de estudio, encontramos que el conocimiento didáctico de la estadística se puede desarrollar en el futuro profesor de matemáticas, de manera que este diseñe e implemente secuencias para la enseñanza-aprendizaje de la estadística innovadoras, a partir de situaciones contextuales. Asimismo, el futuro docente analiza los resultados de evaluación de sus estudiantes y reflexiona sobre su práctica en el aula con el objetivo de mejorarla.

Finalmente, a la luz de los resultados obtenidos en este estudio, consideramos como aporte, a la comunidad investigativa, las categorías y los indicadores presentes en el libro de códigos (tabla 2), diseñados a partir de la conexión entre los principios pedagógicos del modelo SRLE (Ben-Zvi, 2011), con los objetivos que propone el SET para la formación estadística del futuro profesor (Franklin *et al.*, 2015) y las IEF (Burrill y Biehler, 2011), el cual puede ser de utilidad para otros estudios donde se indague acerca del RE, ya que permite tener un panorama amplio acerca de los elementos esenciales para su posible desarrollo, tanto en el profesor de matemáticas como en el estudiante de nivel secundaria. Asimismo, puede ser utilizado para analizar la presencia del RE en los libros de texto de educación primaria o secundaria, o bien, para analizar la práctica del profesor de matemáticas en un aula de clase en el nivel secundaria. Otra posible utilidad, a partir de su adaptación, es su uso en el diseño de secuencias didácticas para su implementación en el aula de clase.

Como línea investigativa a seguir, a partir de este análisis del diseño curricular del plan de estudios 2018 de la LEAMES, y una vez implementado en su totalidad el plan de estudios 2022, se podría realizar un análisis comparativo entre los diversos cursos vinculados a la estadística y la probabilidad, donde el foco sea el RE, así como indagar si estos nuevos cursos cumplen con las demandas actuales de la educación secundaria, la cual está regida por el planteamiento de la Nueva Escuela Mexicana y donde se considera como esencial la metodología de trabajo por proyectos.

REFERENCIAS

Advincula, E., Osorio, A., y Osorio, M. (2022). Dificultades de los profesores al resolver una situación problema de estadística. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 433-455). CiemaeUCM. http://hdl.handle.net/10872/21935

Alsina, Á., Vásquez, C., Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez Muñiz, L. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. *Epsilon Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática,* (104), 99-128. https://thales.cica.es/epsilon_d9/node/4841

Andrade, L., Fernández, F., y Álvarez, I. (2017). Panorama de la investigación en educación estadística desde tesis doctorales 2000-2014. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (41), 87-107. https://doi.org/10.17227/01203916.6039.

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix, 15*(2), 2-13. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/BLAIX.pdf

Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana*, *1*(1), 27-36. https://doi.org/10.14409/yu.v1i1.238

Ben-Zvi, D. (2011). Statistical reasoning learning environment. *EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, *2*(2), 1-13. https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2152

Ben-Zvi, D., y Garfield, J. (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Springer Dordrecht. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6

Bernete, F. (2013). Análisis de contenido. En A. Lucas, y A. Noboa (Eds.), *Conocer lo social: estrategias y técnicas de construcción y análisis de los datos* (pp. 221-261). Editorial Fragua.

Bianchini, C. (2022). *Propuesta didáctica que promueve el sentido estadístico centrada en ideas estocásticas fundamentales* [Tesis doctoral]. Universidad Nacional del Litoral. https://hdl.handle.net/11185/6606

Burrill, G., y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (Eds). *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 57–69). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_10

Clemente, A., y Gómez-Blancarte, A. (2022). El uso curricular del programa tratamiento de la información en la formación estadística de futuros profesores de matemáticas. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 457-481). CiemaeUCM. http://hdl.handle.net/10872/21935

Dirección General de Educación Superior para Profesionales de la Educación (2018). *Planes de Estudio 2018. Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria*. DGESPE. https://dgesum.sep.gob.mx/planes2018

Estrada, A., Batanero, C., y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación matemática*, *16*(1), 89-111. https://doi.org/10.24844/EM1601.04

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. En A. Salcedo (Ed.), *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI* (pp. 173- 194). Universidad Central de Venezuela. http://hdl.handle.net/10872/15712

Franklin, C., Bargagliotti, A., Case, C., Kader, G., Scheaffer, R., y Spangler, D. (2015). *The statistical education of teachers*. American Statistical Association. https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/EDU-SET.pdf

García-García, J.I. (2021). *El contagio de los datos. La importancia de alfabetización estadística* [Conferencia]. II Simposio de Educación Matemática Virtual. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.18297.34408

Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: connecting research and teaching practice*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8383-9

Gómez-Blancarte, A., y Sánchez, E. (2008). El pensamiento estadístico en la planificación de lecciones de estadística por profesores de secundaria. En J.J. Ortiz (Ed.) *Investigaciones actuales en educación estadística y formación de profesores* (pp. 55-72). Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/LIBRO.pdf

Leiria, A., González, M., y Pinto, J. (2015). Conocimiento del profesor sobre pensamiento estadístico. *PNA, 10*(1), 25-51. https://doi.org/10.30827/pna.v10i1.6094

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6*(2), 187–205. https://doi.org/10.1007/BF00302543

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ª. ed.) McGraw-Hill.

Hernández, S., Ruiz, B., Pinto, J., y Albert, J.A. (2013). Retos para la enseñanza y la formación de profesores de estadística en México. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones, 20*(2), 257-273. https://doi.org/10.15517/rmta.v20i2.11665

Heymann, H. W. (2003). *Why teach mathematics: A focus on general education*. Kluwer Academic Publishers.

Micheli, E. (2010). Desafíos y oportunidades en la enseñanza de la estadística. En U. Malaspina (Ed.), *V Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 3-18). Pontificia Universidad Católica del Perú. https://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/110932

Pfannkuch, M., y Ben-Zvi, D. (2011). Developing Teachers' Statistical Thinking. En C. Batanero, G. Burrill, y C. Reading (eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 323-333). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_31

Pinto, J. (2022). Estadística con proyectos: una propuesta para la formación del profesorado. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 47-75). CiemaeUCM. http://hdl.handle.net/10872/21935

Pinto, J., Zapata-Cardona, L., Tauber, L., Alvarado, H., y Ruiz, B. (2018). Programa de formación de profesores en probabilidad y estadística. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31*(1), 897-904. https://www.clame.org.mx/documentos/alme31_1.pdf

Ramos, L. (2019). La educación estadística en el nivel universitario: retos y oportunidades. *Revista Digital de Investigación en Docencia Universitaria, 13*(2), 67-82. http://dx.doi.org/10.19083/ridu.2019.1081

Salcedo, A. (2019). Las ideas fundamentales de la estadística en textos escolares de matemáticas. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Universidad de Granada. www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Secretaría de Educación Pública. (2018). *Tratamiento de la Información*. SEP. https://dgesum.sep.gob.mx/storage/recursos/Planes%202018/MAT/fhJTt3lSsG-1425.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2019). *Pensamiento Estocástico*. SEP. https://dgesum.sep.gob.mx/storage/recursos/Planes%202018

Secretaría de Educación Pública. (2020). *Estadística Inferencial*. SEP. https://dgesum.sep.gob.mx/storage/recursos/Planes%202018/MAT/dGmiAYkzRL-1453.pdf

Marchant, C., y Su, C.S. (2021). The statistical reasoning level of Chilean students of pedagogy in mathematics on statistical hypotheses tests. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *23*(6), 209-236. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5772

Vásquez, C., y Cabrera, G. (2022). La estadística y la probabilidad en los currículos de matemáticas de educación infantil y primaria de seis países representativos en el campo. *Educación matemática*, *34*(2), 245-274. https://doi.org/10.24844/em3402.09

Vázquez, C. y Alsina, Á. (2022). La estadística y la probabilidad en los currículos de infantil y primaria: implicaciones para la formación del profesorado. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 189-214). CiemaeUCM. http://hdl.handle.net/10872/21935

Watson, J. M., Fitzallen, N., y Carter, P. (2013). *Top drawer teachers: Statistics*. Australian Association of Mathematics Teachers and Education Services Australia. http://topdrawer.aamt.edu.au/Statistics

Zamora, J., Aguilar, E., y Guillén, H. (2022). Educación Estadística: tendencias para su enseñanza y aprendizaje en educación secundaria y terciaria. *Revista Educación*, *46*(1), 547-567. https://doi.org/10.15517/revedu.v46i1.43494

Zapata-Cardona, L., y González, D. (2017). Imágenes de los profesores sobre la estadística y su enseñanza. *Educación matemática*, *29*(1), 61-90. https://doi.org/10.24844/em2901.03

Autor de correspondencia
Jaime I. García-García

Dirección: Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Básicas,
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE).
Av. José Pedro Alessandri 774, Ñuñoa, Santiago, Chile.
jaime.garcia@umce.cl

Teléfono: +56974788283

 https://doi.org/10.24844/EM3603.06

Actitud hacia la probabilidad y su enseñanza del profesorado de educación secundaria

Attitude towards probability and its teaching of secondary school teachers

Jon Anasagasti,[1] Ane Izagirre,[2] Ainhoa Berciano[3]

Resumen: En este estudio se analizan las actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza del profesorado de educación secundaria en activo de la Comunidad Autónoma Vasca; en esta etapa educativa el alumnado tiene entre 12 y 18 años. La formación académica, el sexo y la experiencia laboral son las variables que se han considerado y la escala utilizada es Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza (ASPT). La muestra se compone por 185 docentes (59.5% mujeres, 38.9% hombres, 1.6% *otra opción*), y la edad media es de 44.51 años (D.T.=10.72). A partir de un análisis descriptivo mediante el programa estadístico SPSS 28, los resultados indican que la actitud del profesorado participante, en general, es moderadamente positiva y que dicha percepción es, aparentemente, mejor para el profesorado masculino con respecto a la del femenino; además, el profesorado con formación en matemáticas, física o económicas muestra actitudes positivas, mientras que el de ingeniería, ciencias experimentales y arquitectura presentan actitudes positivas leves. En cuanto a la experiencia laboral las actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza muestran valores más positivos según incrementan los años de experiencia.

Fecha de recepción: 10 de julio de 2023. **Fecha de aceptación:** 21 de agosto de 2024.

[1] Departamento Didáctica de las Matemáticas, Ciencias Experimentales y Sociales. Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, jon.anasagasti@ehu.eus, https://orcid.org/0000-0002-4732-7874.

[2] Departamento Didáctica de las Matemáticas, Ciencias Experimentales y Sociales. Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, ane.izagirre@ehu.eus, https://orcid.org/0000-0001-8900-1576.

[3] Departamento Didáctica de las Matemáticas, Ciencias Experimentales y Sociales. Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, ainhoa.berciano@ehu.eus, https://orcid.org/0000-0001-7399-4745.

Se concluye que los datos muestran un comportamiento actitudinal heterogéneo del profesorado en activo y se pone de manifiesto la necesidad de analizar si las diferencias detectadas son estadísticamente significativas y examinar en detalle los posibles motivos de dichas diferencias.

Palabras clave: *actitudes, probabilidad, profesorado, educación secundaria, sexo, formación académica, experiencia laboral*

Abstract This study analyses the Attitudes towards Probability and its teaching of in-service Secondary Education teachers in the Autonomous Community of the Basque Country; in this educational stage, students are between 12 and 18 years old. Academic training, gender and work experience are the variables taken into account for that purpose and the scale used is Attitudes towards Probability and its Teaching (ASPT). The sample is conformed of 185 teachers, (59.5% women, 38.9% men and 1.6% who chose *another option*). The average age is 44.51 years (S.D.= 10.72). Based on a descriptive analysis using the SPSS 28 statistical programme, the results indicate that the attitude of participant teachers, in general, is moderately positive and that the perception is apparently better for male teachers than for female teachers; moreover, teachers with a background in mathematics, physics or economics show positive attitudes, while those with a background in engineering, experimental sciences and architecture show slightly positive attitudes. With regard to work experience, attitudes towards probability and its teaching show more positive values as the years of experience increase. It is concluded that the data show heterogeneous attitudinal behaviour of in-service teachers and it is necessary to analyse whether the differences detected are statistically significant and, at the same time, to examine in detail the possible reasons for these differences.

***Keywords*:** *attitudes, probability, in-service teachers, secondary education.*

INTRODUCCIÓN

La alfabetización probabilística es un concepto que está cobrando relevancia en las últimas décadas y que se considera imprescindible tanto en la vida cotidiana de la ciudadanía como en el ámbito profesional (Batanero, 2013; Cotrado *et al.*, 2022; Hokor, 2023). Esto, tal como señalan Estrada y Batanero (2020), se plasma en los currículos internacionales y, en concreto, en el currículo español de Educación Secundaria que ha entrado en vigor recientemente (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022, pp. 114407-114423). A pesar de que en dicho currículo se incluya la comprensión y aplicación de los conceptos básicos de probabilidad, estudios previos muestran que dicha materia no se trata en la medida en que debería, dedicándole poco tiempo y, en parte, este hecho puede deberse a que el profesorado muestra cierta resistencia a dar la materia (Serradó *et al.*, 2006). En este sentido, Veloo y Chairhany (2013) afirman que la actitud que tiene el profesorado hacia la materia que imparte es fundamental, debido a que si el docente tiene una actitud positiva se verá reflejado en el rendimiento del alumnado, y afirman que el tipo de actitud que muestra el profesorado puede venir condicionada por la falta de conocimiento sobre una materia, creando inseguridad.

Las actitudes son un factor determinante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y son un constructo complejo que engloba diversos dominios más allá del cognitivo (Marbán, 2016). En este sentido, hay numerosas investigaciones centradas en la actitud que tiene el alumnado hacia la matemática en general (Klinger, 2011) y hacia la estadística en particular (Auzmendi, 1992; Estrada y Batanero 2008; Ncube y Moroke, 2015; Peiró-Signes *et al.* 2020). Sin embargo, son casi inexistentes los estudios que miden exclusivamente la actitud hacia la probabilidad y su enseñanza del profesorado en activo; para el profesorado en formación, encontramos las investigaciones de Estrada *et al.* (2018), Estrada y Batanero (2020), Ruz *et al.* (2023) y Vásquez *et al.* (2019). Por el contrario, hasta donde los autores conocen, se ha realizado un único estudio que mide la actitud hacia la probabilidad y su enseñanza del profesorado en activo, en concreto, Alvarado *et al.* (2018) consideran una muestra mixta compuesta por 70 docentes de matemáticas en activo de la enseñanza media y 51 docentes en formación de Chile.

Por todo ello, en este estudio nos centramos en analizar la actitud hacia la probabilidad y su enseñanza (ASPT) del profesorado de Educación Secundaria (ES) en activo (en adelante denominado exclusivamente *profesorado* o *docente*) de la Comunidad Autónoma Vasca (CAV), utilizando como variables complementarias de análisis la formación académica, el sexo y la experiencia laboral.

ANTECEDENTES

Formación académica del profesorado de matemáticas de Educación Secundaria

Son escasas las investigaciones sobre la formación académica del profesorado de matemáticas en activo de Educación Secundaria de España; en cambio, existen algunas investigaciones que analizan el perfil del alumnado de la especialidad de matemáticas del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria, a priori, futuro profesorado de esta etapa educativa. Muñiz-Rodríguez *et al.* (2016a) analizan los requisitos que exigen 40 instituciones españolas para acceder a la especialidad de matemáticas de dicho máster, obteniendo que, como era de esperar, todas las universidades dan acceso directo a la especialidad para egresados y egresadas en matemáticas y estadística. Lo mismo ocurre en casi todas las universidades con las titulaciones de ciencias físicas e ingeniería, o industria y construcción (97.5% y 92.5% de las universidades españolas dan acceso directo, respectivamente). Aun así, como mencionan Muñiz-Rodríguez *et al.* (2016a), se debe tener en cuenta que no todas las titulaciones de ingeniería tienen la misma carga de contenido matemático, lo que supone que a veces haya discrepancia en si dicha titulación es conveniente o no para realizar la especialidad de matemáticas. Como ejemplo, encontramos que, para la titulación en informática, 55% de las universidades públicas españolas la consideran adecuada para la especialidad de matemáticas. Esta misma inconsistencia se encuentra plasmada en las titulaciones del campo de ciencias sociales, entre las cuales hay titulaciones con contenido matemático como economía, finanzas o administración de empresas, pero no es el caso para las titulaciones de derecho, sociología o geografía (Muñiz-Rodríguez *et al.*, 2016a). Además, 15% de las universidades también consideran las titulaciones de humanidades y artes, ciencias de la vida, agricultura, salud y servicios sociales suficientes para acceder a la especialidad de matemáticas del Máster de formación que habilita para impartir esta materia en Educación Secundaria.

En otro estudio, Muñiz-Rodríguez *et al.* (2016b) analizan la titulación de 51 estudiantes de la especialidad de matemáticas del Máster de ocho universidades públicas españolas. Obtienen que 43.1% son matemáticas/os, 41.2% ingenieras/os y 15.7% ha realizado otros estudios como empresa y administración, química, arquitectura o estadística. Muñiz-Rodríguez *et al.* (2020) también investigan los perfiles del alumnado de la especialidad de matemáticas del Máster partiendo de una muestra de 124 personas de 33 universidades públicas y privadas españolas. La titulación que posee un porcentaje alto del alumnado es matemáticas y estadística (55.64%), mientras que en segundo lugar se encuentra la ingeniería (27.42%) y, en menor medida, otras titulaciones (16.94%).

A pesar de que el perfil del alumnado de la especialidad de matemáticas del Máster nos pueda orientar acerca del perfil del profesorado de Educación Secundaria de matemáticas, no debemos olvidar que los requisitos para acceder a la docencia los determina cada comunidad autónoma. Centrándonos en la legislación de la Comunidad Autónoma Vasca (CAV), por un lado, si examinamos la última convocatoria de las oposiciones de Enseñanza Secundaria y Formación Profesional (Gobierno Vasco, Departamento de Educación, 2020), observamos que los requisitos para poder participar en los procedimientos selectivos son: estar en posesión de un título universitario y el máster de secundaria. Y, por otro lado, si analizamos la normativa sobre gestión de la lista de personas candidatas para la cobertura de necesidades temporales de personal docente en centros públicos no universitarios de la Comunidad Autónoma del País Vasco (Gobierno Vasco, Departamento de Educación, 2012), nos encontramos con dos listas para cubrir las sustituciones de matemáticas compuestas por las siguientes titulaciones:

- Afinidad 1: Matemáticas, Ciencias Actuariales y Financieras, Física, Informática, Ingeniería Superior, Arquitectura.
- Afinidad 2: Geología, Biología, Administración y Dirección de Empresas, Economía, Química, Ciencias Ambientales.

Esta variedad de titulaciones se debe, en gran medida, a la situación vivida en la década de los años 80 y principios de los 90 del siglo pasado cuando, debido a la falta de docentes con titulación matemática, se aceptaron diversas titulaciones para acceder a la docencia (Muñiz-Rodríguez *et al.* 2016a) y da lugar a que el profesorado de matemáticas de secundaria resulte, en cuanto a formación académica, a priori, un colectivo muy heterogéneo.

Actitud hacia la probabilidad y su enseñanza

Los primeros estudios acerca de la afectividad hacia la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas datan de los años 70; en ellos, Fennema y Sherman (1976) consideraron analizar las actitudes hacia las matemáticas desde la perspectiva de género para valorar si la actitud hacia la matemática, el rendimiento académico y la falta de mujeres en ámbitos STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics; CTIM, en castellano) guardaban relación, creando el test "Fennema-Sherman mathematics attitude scales". Desde entonces, la relevancia dada al dominio afectivo en el aprendizaje de la matemática ha aumentado hasta tal punto que el nuevo decreto de enseñanzas mínimas de Educación Secundaria Obligatoria (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022) ha incorporado como saberes básicos el sentido socio-afectivo, incorporando las actitudes y la gestión emocional como elementos destacados del aprendizaje de las matemáticas.

Centrando nuestro interés en la actitud hacia la estocástica (estadística y probabilidad), tenemos que la mayoría de los estudios publicados se enfocan en analizar la actitud hacia la estadística. Así, encontramos varios instrumentos en las últimas cuatro décadas como el *Statistics Attitude Survey* (Roberts y Bilderback, 1980), el *Attitudes Toward Statistics* (Wise, 1985) la *Escala de Actitudes hacia la Estadística* (Auzmendi, 1992), o el *Survey of Attitudes Toward Statistics* en sus diferentes versiones (Schau *et al*., 1995; Schau, 2003), el cual sigue siendo ampliamente utilizado internacionalmente (Persson *et al*., 2019; Rodríguez-Santero y Gil-Flores, 2019). En cuanto a estadística, sobre las variables asociadas a este estudio, encontramos que Estrada *et al.* (2004) miden las actitudes hacia la estadística del profesorado en formación y en ejercicio considerando componentes antropológicas (social, educativa, instrumental) y pedagógicas (afectiva, cognitiva, comportamental), y concluyen que las actitudes hacia la estadística del profesorado en formación y en ejercicio tienen características muy similares, si bien encuentran una mayor puntuación media en el profesorado en ejercicio. Respecto al género, hay estudios que indican que, a pesar de contemplar pequeñas diferencias respecto a los componentes o a la hora de analizar el proceso de aprendizaje (Anasagasti *et al*., 2023b), en general, no hay diferencias significativas entre hombres y mujeres (Dauphinee *et al*., 1997; Estrada *et al*., 2004).

Para el caso de la probabilidad, dados los escasos estudios acerca de la actitud y partiendo de los instrumentos para evaluar la actitud hacia la estadística, Estrada y Batanero (2015) diseñaron y validaron la denominada *Escala de Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza* (en adelante ASPT), con el fin de medir la actitud que muestra el profesorado hacia la probabilidad y su enseñanza. En concreto, la ASPT está conformada por un total de 28 ítems con una escala Likert de 1 a 5 puntos, que se agrupan en siete componentes, a su vez, subdivididos en tres dimensiones (tabla 1).

Tabla 1. Descripción de las dimensiones, los componentes e ítems de la escala ASPT.

Dimensión	Componente	Descripción	Ítems
1. Actitudes hacia la probabilidad	Afectiva (AP)	Sentimientos de la persona, positivos o negativos, hacia la probabilidad.	1,5,16,27
	Competencia cognitiva (CCP)	Autopercepción de la capacidad intelectual hacia la probabilidad.	6,8,17,22
	Comportamental (BP)	Tendencia a usar herramientas de probabilidad cuando sea conveniente.	2,7,15,18
2. Actitudes hacia la enseñanza de la probabilidad	Afectiva (AT)	Sentimientos personales, positivos o negativos, hacia la enseñanza de la probabilidad.	9,21,26,28
	Competencia didáctica (CT)	Percepción del profesorado en formación sobre su propia capacidad para enseñar probabilidad.	3,10,14,23
	Comportamental (BT)	Tendencia a la acción didáctica en la enseñanza de la probabilidad.	11,20,24,25
3. Valor a la probabilidad y su enseñanza	Valor (VPT)	Utilidad y relevancia que el profesorado concede a la probabilidad y su enseñanza en la vida personal y profesional.	4,12,13,19

Fuente: Ruz *et al.* (2023, pp. 5-6).

Estrada *et al.* (2016) comenzaron con un estudio piloto donde se administró el cuestionario ASPT a 71 docentes en formación de Educación Primaria (EP), obteniendo que, tanto para la escala en global como para cada componente, la media supera la puntuación neutra (valor 3 en la escala). Estos mismos resultados se reflejaron en la investigación de Estrada *et al.* (2018) donde ampliaron la muestra a 232 docentes en formación de EP. Asimismo, concluyeron que el profesorado en formación aprecia la utilidad que tiene la probabilidad y están dispuestos a enseñarla, pero no se sienten suficientemente preparados ni en cuanto al contenido probabilístico ni pedagógico. Para afrontar esta desconfianza, sugieren al profesorado en formación que exploren diferentes métodos de enseñanza de la probabilidad para adquirir seguridad tanto en su capacidad de aprendizaje como de enseñanza. Estrada y Batanero (2020) consideraron una muestra de 416 docentes en formación de Educación Primaria obteniendo resultados muy similares. En este caso investigaron si había diferencias estadísticamente significativas con respecto a la variable *sexo*, concluyendo que sí las hay para los tres componentes de la Dimensión Actitudes hacia la Probabilidad, siendo los resultados del sexo femenino algo inferiores; en cambio, para el componente Comportamental hacia la Enseñanza de la Probabilidad y Valor a la Probabilidad y su Enseñanza, el sexo femenino presenta una media superior, aunque en este caso no haya diferencias estadísticamente significativas. Estrada y Batanero (2020) sugieren la necesidad de preparar al profesorado en formación que no confía demasiado en sus propias capacidades para aprender y enseñar probabilidad, ya que, apuntan, las actitudes se transmiten del profesorado al alumnado.

Vásquez *et al.* (2019) analizaron los datos de 124 docentes en formación de Educación Infantil, todas ellas mujeres. Los resultados indican actitudes bajas hacia la probabilidad y su enseñanza con más de la mitad de los ítems y componentes con un valor medio negativo (menor que 3 puntos en la escala). Concretamente, los datos revelan que el profesorado en formación de Educación Infantil valora la utilidad de la probabilidad y su enseñanza, pero tiene una autopercepción negativa respecto a su capacidad y conocimientos. Por lo tanto, sugieren organizar acciones formativas para el desarrollo profesional del profesorado en formación, al igual que Guiñez *et al.* (2021), quienes analizaron la influencia que tiene un recurso literario en las actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza de 40 docentes en formación de Educación Primaria de Chile. Las y los participantes muestran actitudes bajas, en general; sí concluyen una mejora estadísticamente significativa para el componente afectivo hacia la enseñanza de la probabilidad tras la incorporación del libro, al igual que se refleja en el análisis cualitativo realizado, donde las respuestas del profesorado en formación sugieren cambios en el plano afectivo tanto hacia la probabilidad como hacia su enseñanza.

Ruz *et al.* (2020) consideraron una muestra de 126 docentes de matemáticas en formación de Educación Secundaria de España y Chile. Es cierto que las y los participantes expresaron, en su mayoría, actitudes positivas hacia la probabilidad y su enseñanza. Aun así, Ruz *et al.* (2020) reflexionan sobre la tendencia a declarar actitudes positivas hacia la probabilidad y su enseñanza, siendo el conocimiento del contenido del profesorado en formación insuficiente. Ruz *et al.* (2023) consideraron una muestra conformada por 269 docentes en formación de matemáticas de Chile. A pesar de que, en general, tanto hombres como mujeres muestran actitudes positivas, las mujeres muestran resultados estadísticamente inferiores para los componentes afectivo y comportamental, no así para el cognitivo. Como mencionan Ruz *et al.* (2023) este hecho manifiesta una menor auto-confianza por parte de las mujeres, pero no así en su rendimiento. Lo que también se refleja en la investigación llevada a cabo por Demircioglu *et al.* (2023) con 212 docentes de matemáticas en formación de Turquía donde obtienen diferencias significativas en el componente afectivo hacia la probabilidad, siendo la actitud de los hombres levemente superior. Mencionan que una hipótesis puede ser el hecho de que los hombres tengan una mayor tendencia a jugar determinados juegos de azar. Por el contrario, las mujeres presentan mejores resultados para los componentes comportamental hacia la enseñanza y de valor, siendo estas diferencias estadísticamente significativas.

La única investigación que considera el profesorado de secundaria en activo como objeto de interés es la de Alvarado *et al.* (2018). En concreto, consideraron una muestra conformada por 70 docentes de matemáticas de la enseñanza media y 51 docentes de matemática en formación de Chile. El análisis descriptivo revela una actitud positiva en ambos grupos, aunque es ligeramente mejor entre el profesorado en activo, y crece con la experiencia docente. En cuanto al sexo, el promedio de la actitud de los hombres es levemente superior al de las mujeres (3.93 frente a 3.85, respectivamente).

Finalmente, se debe señalar que en todos los estudios analizados destacan positivamente el Componente Comportamental hacia la Enseñanza de la Probabilidad y el Valor hacia la Probabilidad y su Enseñanza. De esta manera, las y los participantes muestran que dan o darían, en el caso del profesorado en formación, lugar a la enseñanza de la probabilidad en el aula y reconocen la relevancia que tiene tanto en la vida personal como profesional (ver tabla 2 en el Anexo).

OBJETIVOS

Analizar las Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza (ASPT) del profesorado de Educación Secundaria (ES) en activo (en adelante denominado exclusivamente *profesorado* o *docente*) de la Comunidad Autónoma Vasca (CAV), atendiendo a la formación académica, el sexo y los años de experiencia laboral.

MÉTODO

Para poder dar respuesta al objetivo de investigación, nuestro estudio se enmarca en una metodología cuantitativa desde un enfoque positivista (Godino, 2010). Para ello se analizan las respuestas dadas por las personas participantes a un cuestionario (ASPT) que valora su percepción en una escala Likert de 1 (muy en desacuerdo) a 5 (muy de acuerdo) puntos.

Participantes

En el presente estudio se ha considerado toda la población, esto es, todo el profesorado de secundaria en activo de la CAV. Cabe señalar que en esta etapa educativa el alumnado tiene entre 12 y 18 años. La muestra final está conformada por 185 docentes: 110 mujeres (59.5%), 72 hombres (38.9%) y tres personas (1.6%) que eligen *otra opción*. Debido a que solamente tres personas han elegido esta última categoría, se tendrán en cuenta para los resultados globales, pero no al mostrar los resultados según sexo por no tener un tamaño muestral representativo. La edad media de los y las participantes es de 44.51 años (D.T.=10.72).

Respecto al grado de representatividad de la muestra, debemos mencionar que, con respecto al total de centros educativos involucrados en este estudio, al menos el profesorado del 29.79% de los centros de Álava, 34.56% de los de Guipúzcoa y 24.88% de los de Vizcaya ha respondido al cuestionario, lo que supone un grado de representatividad de la muestra alto (siendo Álava, Guipúzcoa y Vizcaya las tres provincias que componen la CAV).

Instrumento

El instrumento utilizado es la escala Attitudes towards Probability and its Teaching (ASPT) diseñado por Estrada *et al.* (2016), una escala likert con valores entre 1 (muy en desacuerdo) y 5 puntos (muy de acuerdo), compuesta por 28 ítems, de los cuales la mitad están redactados en sentido positivo y la otra mitad en sentido negativo. Los ítems se agrupan de cuatro en cuatro dando lugar a una estructura de siete componentes que se aglutinan en tres dimensiones (tabla 1). Mencionar que se ha adaptado la versión en castellano de Estrada *et al.* (2016) para dirigirnos al profesorado en activo e incorporar un lenguaje más inclusivo. Además, se ha traducido el cuestionario al euskara, proceso que ha sido validado por personas bilingües expertas en el área de didáctica de la matemática (ver Anasagasti *et al.*, 2023a).

La fiabilidad interna del cuestionario es alta con Omega de McDonald de 0.905, y la prueba de esfericidad de Bartlett (p-valor < 0.001) y la medida Kaiser-Meyer-Olkin (0.823) indican una consistencia interna válida.

Ética y procedimiento

Este artículo forma parte de una investigación más amplia, que cuenta con la autorización del comité de Ética para la Investigación y la Docencia (CEID/IIEB) de la Universidad del País Vasco (M10_2021_200). Para la obtención de datos de este trabajo el cuestionario ha sido facilitado telemáticamente a través de un formulario *google forms* que se envió al equipo de dirección de cada centro educativo donde se distribuyó entre el profesorado de la asignatura de matemáticas, quienes lo respondieron de forma anónima y voluntaria.

Posteriormente, se ha realizado un análisis descriptivo de los datos mediante el programa estadístico SPSS 28. Para el análisis de datos se han invertido los resultados obtenidos en los ítems con carácter negativo permitiéndonos, así, tratar todos los ítems en el mismo sentido, es decir, cuanta mayor puntuación, mejor valoración. De esta manera, obtenemos una puntuación de entre 1 (muy en desacuerdo) y 5 (muy de acuerdo), siendo el 3 la posición de neutralidad.

RESULTADOS

Para poder dar respuesta al objetivo de investigación antes descrito y mostrar los datos más relevantes extraídos del análisis del ASPT; en primer lugar, debemos describir la muestra con respecto a su formación académica y la experiencia laboral, disgregados por sexo.

Formación académica del profesorado de la CAV

Como se aprecia en la figura 1, entre el profesorado de matemáticas en activo hay dos categorías que destacan, siendo los estudios de ingeniería los más representados (31.89%), seguido por los de matemáticas (30.27%). La tercera categoría que más figura la componen los que han estudiado un grado de Ciencias Experimentales [CCEE] (biología, geología, química, farmacia o biotecnología). En cuanto a la distribución de las titulaciones según el sexo, observamos en la figura 2 que, entre el profesorado que ha estudiado Ingeniería o Física, hay una mayor proporción de hombres que de mujeres (60% frente a 40%), mientras que entre los que han estudiado un grado de CCEE, Arquitectura y Económicas hay una clara mayor proporción de mujeres (cerca del 80% frente a 20% de hombres). En cuanto a Matemáticas, observamos que hay más mujeres (65% frente a 35% de hombres), pero que resulta una distribución similar a la distribución total de la muestra. Debido al bajo porcentaje de personas con estudios en magisterio (2 personas; 1.08%) el tamaño muestral no es representativo.

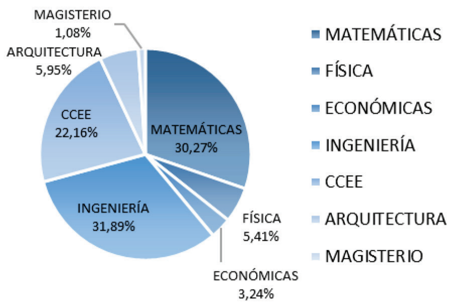


Figura 1. Distribución de la formación académica del profesorado.

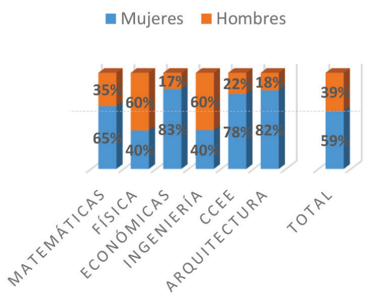


Figura 2. Distribución del profesorado según la formación académica y el sexo.

Experiencia laboral del profesorado de la CAV

Los intervalos de (0, 5) años y más de 20 años de experiencia laboral son los más representados en la muestra considerada, con un porcentaje de 30.3% y 34.6%, respectivamente, como muestra la tabla 3. Si fijamos nuestra atención en la distribución según el sexo, observamos que en todos los intervalos la proporción de mujeres es superior a la de los hombres, destacando en este sentido el intervalo de (15, 20) años. Por el contrario, el intervalo con menor años de experiencia, (0, 5) años, presenta la diferencia más reducida en cuanto a la representación de ambos sexos.

Tabla 3. Distribución del sexo del profesorado según la experiencia laboral.

Experiencia laboral\Sexo	Mujer	Hombre	Otra Opción	Total (fi;hi)
(0, 5]	29; 51.8%	25;44.6%	2; 3.6%	56; 30.3%
(5, 10]	16; 59.3%	11; 40.7%	0; 0%	27; 14.6%
(10, 15]	12; 60%	7; 35%	1; 5%	20; 10.8%
(15, 20]	14; 77.8%	4; 22.2%	0; 0%	18; 9.7%
>20	39; 60.9%	25; 39.1%	0; 0%	64; 34.6%
Total	110; 59.5%	72; 38.9%	3; 1.6%	185; 100%

Puntuaciones del cuestionario ASPT

En primer lugar, con el fin de ver qué tipo de actitud tiene el profesorado hacia la probabilidad y su enseñanza, se muestran las medias para la escala total, los siete componentes (tabla 4) y cada ítem (ver tabla 5 en el Anexo). La puntuación media de la escala es de 3.91 lo que indica que el profesorado, en general, tiene actitudes positivas. Las puntuaciones medias de todos los componentes sobrepasan la posición de indiferencia (3), obteniendo actitudes positivas leves (3, 3.8) para el Componente Comportamental hacia la Enseñanza de la Probabilidad (BT), Componente Comportamental hacia la Probabilidad (BP) y Componente de Competencia Didáctica hacia la Enseñanza de la Probabilidad (CT), y actitudes positivas (3.8,5) para el resto de componentes, destacando el Componente de Valor hacia la Probabilidad y su Enseñanza (VPT). Un estudio más detallado de algunos de estos componentes se encuentra en Anasagasti *et al.* (2023a) e Izagirre *et al.* (2023).

Tabla 4. Media y desviación típica de la escala ASPT y de cada componente para la muestra en estudio

	ASPT	AP	CCP	BP	AT	CT	BT	VPT
Media	3.91	3.96	4.02	3.75	3.95	3.79	3.7	4.2
D.T.	.54	.82	.58	.75	.81	.73	.7	.61

Centrando nuestro interés en los ítems de la escala ASPT (tabla 5), todos tienen una media superior a 3 (puntuación neutra). Los 3 ítems mejor valorados han sido el 12, 18 y 26, con una puntuación media superior a 4.3, siendo el ítem 12, *La probabilidad sólo sirve para los juegos de azar,* el mejor valorado con una media de 4.64, ítem que pertenece al Componente de Valor hacia la Probabilidad y su Enseñanza (VPT). Los ítems peor valorados, con una puntuación media inferior a 3.5, han sido el 2, 15 y 24 correspondientes a Componentes Comportamentales; los dos primeros hacia la Probabilidad (BP) y el último hacia su enseñanza (BT), el *24, Cuando es pertinente, utilizo la probabilidad en otras materias que enseño*, es el peor valorado. Los resultados indican que el profesorado de la CAV valora la utilidad que tiene la probabilidad en la vida y su utilidad para los juegos; sin embargo, aunque lo vea pertinente, no lo aplica en otras materias que enseña ni en la vida real. Los resultados también muestran que el profesorado se siente con confianza a la hora de enseñar los contenidos de probabilidad (ítem 8) y, además, le agrada (ítem 27), pero, contradictoriamente, no le resulta sencillo diseñar actividades de evaluación de la probabilidad (ítem 14).

Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza del profesorado según el sexo

La figura 3 presenta la distribución de las puntuaciones medias del ASPT. Si analizamos los resultados de forma global, se observa que los resultados de los hombres están apilados cerca de 4.2 puntos con D.T.=0.47; siendo la media 3.98 y la mediana 4.09. En cambio, en el caso de las mujeres los resultados están más dispersos, apilándose en torno a 3.5 (figura 3), aunque coinciden la media (D.T.=0.57) y la mediana con un valor de 3.8. Si consideramos una puntuación mayor o igual a 3.8 como una actitud positiva, encontramos que 69.4% de los hombres tiene una percepción positiva frente a solamente 52.72% de las mujeres y si, por el contrario, consideramos una puntuación inferior a 3 puntos como una respuesta negativa, encontramos que 7.27% de las mujeres tiene una percepción negativa frente a solamente 2.7% de los hombres.

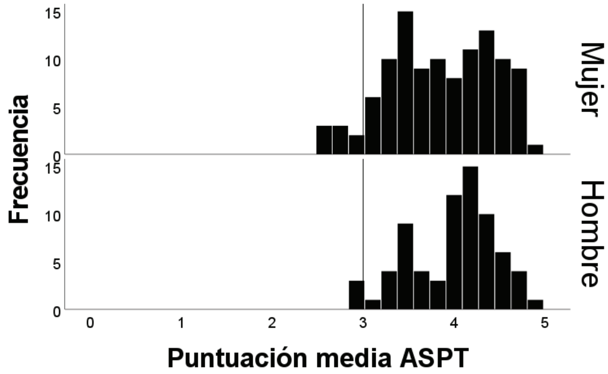


Figura 3. Distribución de la puntuación media de la ASPT según el sexo. La línea vertical indica la posición neutra, correspondiente al valor 3 de la escala.

Por otro lado, en la tabla 6 podemos apreciar que la puntuación media de los hombres para la escala ASPT y cada componente es siempre mayor que la de las mujeres, dando a entender que la percepción del género masculino hacia los conocimientos de la probabilidad y su enseñanza es superior. Esta interpretación queda ratificada por los valores de la mediana (figura 4), que muestra mayores valores para los hombres que para las mujeres para todos los componentes, excepto para el Componente de Competencia Didáctica (CT) y el Componente Comportamental (BT), en los que coinciden. Podemos ver, también, que el Componente de Valor hacia la Probabilidad y su Enseñanza (VPT) destaca positivamente en ambos sexos, seguido por el Componente Afectivo hacia la Enseñanza de la Probabilidad (AT) entre los hombres, y el Componente de Competencia Cognitiva apreciada hacia la Probabilidad (CCP) entre las mujeres. El componente peor valorado entre los hombres es el Componente Comportamental hacia la Enseñanza de la Probabilidad (BT), y entre las mujeres el Componente Comportamental hacia la Probabilidad (BP).

Tabla 6. Media y Desviación Típica de la escala ASPT y de cada componente según el sexo.

		Escala	AP	CCP	BP	AT	CT	BT	VPT
Mujer	Media	3.86	3.92	3.99	3.62	3.87	3.78	3.7	4.13
	D.T.	.57	.86	.61	.77	.85	.76	.69	.64
Hombre	Media	3.99	4.03	4.05	3.93	4.06	3.81	3.72	4.3
	D.T.	.47	.77	.54	.69	.74	.7	.73	.55

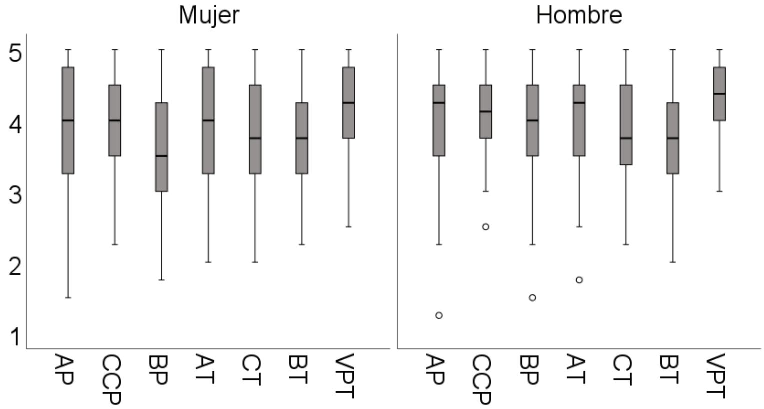


Figura 4. Diagrama de caja y bigotes para cada componente de la escala ASPT según el sexo.

Entre las mujeres, los 3 ítems mejor valorados fueron el 12, 18 y 26. Y los peor valorados el 2, 15 y 24 destacando el ítem 15 *Uso la probabilidad en la vida cotidiana* con una media de 2.97 que pertenece al Componente Comportamental hacia la Probabilidad (BP), precisamente el componente peor valorado entre las mujeres. Entre los hombres, los ítems mejor valorados han sido el 7, 12 ,13 y 22. Los peor valorados son el 6, 15 y 24, ítems que también aparecían entre los peor valorados entre las mujeres. En total, encontramos solo cinco ítems donde la puntuación media de las mujeres es superior a la de los hombres; dos de ellos del Componente de Competencia Didáctica hacia la Enseñanza de la Probabilidad (CT), aquel que menores diferencias presenta respecto a los hombres, junto con el Componente Comportamental hacia la Enseñanza de la Probabilidad (BT).

Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza del profesorado según el área de formación académica universitaria

Analizando las puntuaciones de la escala en global según el área de formación académica (tabla 7), las personas con formación en matemáticas, física o económicas muestran actitudes positivas, mientras que las personas con formación en ingeniería, ciencias experimentales (CCEE) y arquitectura muestran actitudes positivas leves. Si examinamos los resultados por componentes, el Componente de Valor a la Probabilidad y su Enseñanza (VPT), el que mide la utilidad y relevancia que se le otorga a la probabilidad y su enseñanza, obtiene puntuaciones altas para todas las categorías. Concretamente, para las categorías con actitudes positivas leves es el componente mejor valorado. En cambio, para las categorías con actitudes positivas, el componente Afectivo hacia la Probabilidad (AP) es el que obtiene puntuaciones más altas. A pesar de que la formación de económicas muestra actitudes positivas, es reseñable la baja puntuación que obtiene para los componentes Comportamental hacia la Probabilidad (BP) y Competencia Didáctica (CT). Y entre las categorías con actitudes leves, destacan negativamente el Componente Comportamental hacia la Enseñanza de la Probabilidad (BT) para las titulaciones de ingeniería y arquitectura, y el Componente Afectivo hacia la Enseñanza de la Probabilidad (AT) para la categoría de ciencias experimentales.

Tabla 7. Media y Desviación Típica de la escala ASPT y de cada componente según la formación académica.

		Escala	AP	CCP	BP	AT	CT	BT	VPT
Matemáticas	Media	4.22	4.4	4.29	3.87	4.4	4.13	3.98	4.39
	D.T.	.49	.7	.5	.79	.66	.72	.69	.51
Física	Media	4.01	4.2	4.1	3.9	4.08	3.88	3.83	4.13
	D.T.	.5	.5	.52	.6	.64	.64	.47	.65
Económicas	Media	3.95	4.38	4	3.5	4.08	3.5	4.04	4.08
	D.T.	.56	.52	.61	1.24	.54	.55	.73	.68
Ingeniería	Media	3.8	3.75	3.98	3.76	3.81	3.67	3.48	4.17
	D.T.	.48	.82	.52	.71	.76	.67	6.68	.62
CCEE	Media	3.71	3.66	3.77	3.59	3.54	3.61	3.7	4.1
	D.T.	.47	.8	.55	.71	.73	.7	.67	.62
Arquitectura	Media	3.6	3.52	3.77	3.66	3.55	3.59	3.2	3.9
	D.T.	.65	.79	.77	.79	.94	.93	.55	.79

Entre los resultados por ítem en función de la formación académica, destaca que uno de los ítems mejor valorados por las personas de las tres titulaciones con actitudes positivas (matemáticas, física o económicas), y en contraste con las personas formadas en ingeniería, ciencias experimentales (CCEE) y arquitectura, es el número 26, *No tengo mucho interés en enseñar probabilidad, aunque aparezca en el currículum.* Por último, también mencionar que uno de los ítems mejor valorados por las personas formadas en matemáticas es el 22, expresando así sentirse preparadas para resolver cualquier problema básico de probabilidad.

Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza del profesorado según la experiencia laboral

Examinando los resultados según la experiencia laboral, observamos que las Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza mejoran con los años, aunque se observa un descenso en la franja de 10 a 15 años (tabla 8). Precisamente, este intervalo, junto al de (0,5) años, obtiene actitudes positivas leves y esto también se refleja en los resultados por componentes que, en su mayoría, muestran puntuaciones más bajas. Por el contrario, el resto de los intervalos muestran actitudes positivas. Una vez más, el Componente de Valor (VPT) es el mejor valorado en todos los intervalos.

Tabla 8. Media y Desviación Típica de la escala ASPT y de cada componente según la experiencia laboral.

		Escala	AP	CCP	BP	AT	CT	BT	VPT
(0,5] años	Media	3.78	3.82	4.01	3.69	3.78	3.65	3.45	4.09
	D.T.	.55	.79	.62	.72	.79	.78	.66	.67
(5,10] años	Media	3.88	3.88	4	3.74	3.89	3.79	3.56	4.28
	D.T.	.53	.82	.6	.75	.82	.71	.68	.63
(10,15] años	Media	3.69	3.5	3.86	3.43	3.79	3.61	3.54	4.15
	D.T.	.57	.9	.56	.94	.83	.78	.76	.71
(15,20] años	Media	4.07	4.19	4	3.9	4.11	4.04	3.94	4.28
	D.T.	.49	.74	.5	.55	.64	.53	.77	.48
>20 años	Media	4.05	4.05	4.18	4.07	4.12	3.91	3.96	4.27
	D.T.	.49	.78	.56	.74	.83	.71	.6	.55

Entre los resultados por ítem en función de la experiencia laboral, cabe destacar el ítem 11, *Solo enseño probabilidad si me queda tiempo después de los otros temas*. Este ítem es el que mayor diferencia registra en las respuestas dadas por los distintos intervalos y, sobre todo, muestra una tendencia creciente que va desde registros más bajos entre el profesorado que tiene una dedicación menor de 10 años a puntuaciones más altas en el caso de las personas con mayor experiencia, lo cual puede indicar que con el tiempo el profesorado realiza mayores esfuerzos para incluir la probabilidad en sus clases.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Queremos poner en valor que, hasta donde conocen sus autoras y autores, este trabajo es el primero que se realiza con el fin de determinar el tipo de actitud del profesorado de educación secundaria en activo hacia la probabilidad y su enseñanza. En primer lugar, respecto a las características de la muestra, hemos observado una mayor proporción de profesorado de matemáticas femenino; esto coincide, precisamente, con Tatto *et al.* (2012) que indica que la enseñanza es un sector feminizado tanto en España como en otros países y también con Muñiz-Rodríguez *et al.* (2016b), que mencionan que la mayoría de estudiantes de la especialidad de matemáticas del Máster de Secundaria son mujeres. En cuanto a la formación académica, solamente 30.27% de la muestra del profesorado de Educación Secundaria (ES) es egresado o egresada en matemáticas. Esta situación tan llamativa, donde la representación de personas matemáticas es tan escasa, no se contempla entre los estudiantes de la especialidad de matemáticas del Máster analizados por Rodríguez-Muñiz *et al.* (2016b) y Muñiz-Rodríguez *et al.* (2020), donde las titulaciones más representadas son la de matemáticas o estadística, con alrededor de la mitad de estudiantes, seguida por la de ingeniería, y con solamente 16% de los estudiantes en posesión de otra titulación. Creemos que el hecho de que la proporción de profesorado en activo sea inferior a la proporción de estudiantes que se preparan específicamente para ello puede ser un motivo de preocupación, puesto que con ello podría entenderse una falta de preparación entre el profesorado en activo. El hecho de que gran parte del profesorado pueda carecer de una preparación específica nos plantea una futura línea de investigación para poder ahondar en este indicador.

En cuanto al objetivo principal del estudio, determinar las Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza del profesorado de ES de la CAV, los resultados de la muestra nos permiten sugerir que las actitudes, en general, son positivas entre el profesorado, siendo la puntuación media de la escala y las puntuaciones medias de los siete componentes superiores a la puntuación de indiferencia o neutra. En el caso de los ítems, las puntuaciones medias de todos ellos son superiores a 3, que supondría igualmente una posición neutra. Es más, se ha obtenido una puntuación positiva (mayor o igual a 3.8) en 20 ítems, y una puntuación inferior a 3.8 solamente en 8. Estos últimos, con los resultados más bajos, reflejan la baja utilidad que conceden a la probabilidad en otras materias que enseñan y en la toma de decisiones en la vida diaria; y también la dificultad que les supone la materia en sí, así como el diseño de actividades de evaluación.

A pesar de que las investigaciones previas no centran su interés en el profesorado de ES en activo, por similitud con este colectivo, debemos realizar una reflexión derivada de la comparación de los resultados con las investigaciones de Dermincioglu et al (2023), Ruz *et al.* (2023), Guiñez *et al.* (2021), Ruz *et al.* (2020), Estrada y Batanero (2020), Vásquez *et al.* (2019) y Alvarado *et al.* (2018). En nuestro caso tenemos que la puntuación media es superior a la mostrada en estudios previos, excepto para el profesorado en activo considerado por Alvarado *et al.* (2018) donde la diferencia es ínfima (3.95 frente a 3.91 obtenido en el presente estudio). Centrándonos en las puntuaciones medias de los siete componentes, el profesorado de la CAV presenta mejor actitud en todos los componentes que el profesorado en formación de educación infantil y educación primaria chileno analizado en los estudios de Vásquez *et al.* (2019) y Guiño *et al.* (2021), respectivamente, y el profesorado de matemáticas en formación de Turquía considerado por Dermincioglu *et al.* (2023). Comparando los resultados con los obtenidos por Estrada y Batanero (2020) y Ruz *et al.* (2020), observamos que en este estudio hay un componente con puntuación media levemente menor al resto de estudios, el Componente Comportamental hacia la Enseñanza de la Probabilidad (BT), siendo esta, aun así, cercana a 3.75. Y contrastando los resultados con los de Alvarado *et al.* (2018), obtenemos 3 componentes que muestran una media inferior; el Componente Comportamental hacia la Enseñanza de la Probabilidad (BT), el Componente Comportamental hacia la Probabilidad (BP) y el Componente Afectivo hacia la Enseñanza de la Probabilidad (AT). Una posible hipótesis que justifica los resultados más bajos obtenidos en este estudio para el Componente Comportamental hacia la Enseñanza de la Probabilidad (BT) es la exigencia de impartir contenidos probabilísticos de forma obligatoria, mientras que en Educación Infantil y Primaria es una materia que se suele eludir con frecuencia (Alsina, 2016).

Con todo esto, concluimos que el profesorado de la muestra, tiene, en general, una buena actitud hacia la probabilidad y su enseñanza, mejor que las consideradas en el resto de las investigaciones. Presentan una mejor autopercepción hacia las capacidades competenciales como didácticas de la probabilidad, aunque le dan poca utilidad dentro del aula en otras materias o en la vida cotidiana, como se ve reflejado en el Componente Comportamental hacia la Enseñanza de la Probabilidad (BT), que es el peor valorado. Se puede concluir que, a pesar de reconocer el valor conferido a la probabilidad y a su enseñanza (componente con puntuación más alta), el profesorado no indica una clara predisposición ni a darle uso ni a llevarlo a la realidad del aula. Esto sugiere que se deben proponer acciones formativas, ya sea en los estudios de Máster o en la formación continua, que provoquen no solamente actitudes positivas, sino también comportamientos positivos hacia la enseñanza de la probabilidad.

Centrándonos en el sexo, los resultados de la escala total indican una percepción del profesorado masculino más alta que la del femenino (3.99 frente a un 3.86), así como para todos los componentes e ítems, coincidiendo con los resultados obtenidos por Martins *et al.* (2015) y Estrada y Batanero (2020), pero en contra de los de Estrada *et al.* (2004). A pesar de que en todas las componentes se observe mayor puntuación del profesorado masculino que el profesorado femenino, estos datos hay que valorarlos con cautela, debido a que no se ha realizado un análisis inferencial para comprobar si dichas diferencias son estadísticamente significativas o no, lo que abre una nueva línea de investigación. En caso de confirmarse, este resultado podría asociarse a la idea, tal como sugieren estudios como el de Daches Cohen *et al.* (2021), de que, en general, la actitud de las mujeres hacia las matemáticas es peor que la de los hombres, aunque deberá ser contrastada.

La formación académica también nos ayuda a extraer conclusiones que merecen ser mencionadas, sobre todo porque reflejan cierta tendencia de actitud atendiendo a los grupos que definen las submuestras. Así, vemos cómo las personas egresadas en arquitectura son las que obtienen puntuaciones más bajas y son, al menos para el caso de la Universidad del País Vasco, las únicas que no reciben ninguna formación en estadística y probabilidad durante la carrera universitaria. A estas les siguen personas egresadas en ciencias experimentales que cursan entre una y tres asignaturas de matemáticas, siendo una de ellas la bioestadística. Luego, están las y los graduados en ingeniería, que cursan alrededor de seis asignaturas de matemáticas siendo una de ellas la de métodos estadísticos de la ingeniería. Y, por último, están con actitudes positivas las egresadas en economía, físicas y matemáticas quienes reciben una formación en matemáticas más extensa y, en estadística y probabilidad en particular, más amplia. Por lo tanto, de este estudio se puede plantear como hipótesis que las categorías de la formación académica con actitudes positivas leves son aquellas que reciben una escasa formación en estadística y probabilidad.

Con respecto a la experiencia laboral, atendiendo al estudio de Alvarado *et al.* (2018), era de esperar que las actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza mejorasen según incrementan los años de experiencia, hecho que se ratifica parcialmente en este trabajo, salvo para el intervalo de (10, 15] años, donde se obtiene un descenso de las actitudes.

Finalmente, concluimos que la percepción hacia los conocimientos de la probabilidad y su enseñanza del profesorado de ES participante en el estudio es buena, pero con un índice de heterogeneidad alto, tanto con respecto a la variable formación académica como a las variables sexo y experiencia laboral. A lo largo de las conclusiones obtenidas, hemos señalado diversas líneas de investigación que pueden resultar de gran interés de cara al futuro, como pueden ser, analizar los motivos por los que se aprecia una diferencia considerable en la proporción de personas graduadas en matemáticas entre las que se preparan para dar clases en ES y las que se encuentran realmente ejerciendo, o ahondar en si la diferencia de actitud de las mujeres hacia la probabilidad y su enseñanza con respecto a la de los hombres es estadísticamente significativa y los motivos que conducen a esta. Igualmente, sería interesante analizar si las diferencias de actitud encontradas son estadísticamente significativas para las categorías o intervalos de las variables sexo, formación académica y experiencia laboral. Finalmente, como limitaciones del estudio, a pesar de contar con una amplia muestra del profesorado de ES en activo de la CAV, debemos mencionar que el tamaño de esta plantea la necesidad de ser ampliada y, por tanto, este trabajo también abre nuevas líneas de investigación, asociadas a un estudio a mayor escala.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo financiado parcialmente por el Proyecto de Investigación Hezuntza23/01 del GV/EJ y por el Grupo de Investigación GIU21/031 de la UPV/EHU (@komatzi_EHU).

REFERENCIAS

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias. Características y medición*. Ediciones Mensajero.

Alsina, A. (2016). La estadística y la probabilidad en educación primaria. ¿Dónde estamos y hacia dónde debemos ir? *Aula de Innovación Educativa, 251*, 12-17

Alvarado, H., Andaur, G. y Estrada, A. (2018). Actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza: Un estudio exploratorio con profesores de matemáticas en formación y en ejercicio de Chile. *Revista Paradigma, 39*(2).

Anasagasti, J., Berciano, A. e Izagirre, A. (2023a). Actitudes hacia la probabilidad del profesorado de matemáticas de educacin secundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 123–130). SEIEM.

Anasagasti, J., Berciano, A. e Izagirre, A. (2023b). A comparison of the effects of different methodologies on the statistics learning profiles of prospective primary education teachers from a gender perspective. *Journal on Mathematics Education, 14*(4), 741-756. http://doi.org/10.22342/jme.v14i4.pp741-756

Batanero, C. (2013). Teaching and learning probability. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 491-496). Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-31625-3

Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2022). Idoneidad Didáctica de Materiales Curriculares Oficiales Peruanos de Educación Secundaria en Probabilidad. *Bolema, 36*(73), 888-922. https://www.scielo.br/j/bolema/a/JFh7nPfqvRncywnv5dG897h/?format=pdf&lang=es

Daches Cohen, L., Layzer Yavin, L. y Rubinsten, O. (2021). Females' negative affective valence to math-related words. *Acta Psychologica, 217*, 103313. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2021.103313

Dauphinee, T., Schau C. y Stevens, J. (1997). Survey of attitudes toward statistics: Factor structure and factorial invariance for women and men. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal, 4*(2), 129-141. https://doi.org/10.1080/10705519709540066

Demircioglu, H. y Ünveren Bilgiç, E.N. (2023). Examination of the relationship between pre-service teachers' attitudes towards uncertainty, probability and its teaching. *Journal of Pedagogical Sociology and Psychology, 5*(3). https://doi.org/10.33902/jpsp.202323555

Estrada, A. y Batanero, C. (2008). Explaining teachers' attitudes towards statistics. En C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18*

Conference and 2008 IASE Round Table Conference. https://iase-web.org/documents/papers/rt2008/T2P4_Estrada.pdf

Estrada, A. y Batanero, C. (2015). Construcción de una escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 239-247). Alicante.

Estrada, A. y Batanero, C. (2020). Prospective Primary School Teachers' Attitudes towards Probability and its Teaching. *International electronic journal of mathematics education*, *15*(1). https://doi.org/10.29333/iejme/5941

Estrada. A., Batanero, C., Comas, C. y Díaz, C. (2016). *Exploring teachers' attitudes towards probability and its teaching*. 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburg, Alemania.

Estrada, A., Batanero, C. y Díaz, C. (2018). Exploring teachers' attitudes towards probability and its teaching. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds.), *Teaching and learning stochastics* (pp. 313-332). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_18

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J.M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(2), 263-274. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3888

Gobierno Vasco, Departamento de Educación (2012). Orden de 27 de agosto de 2012, de la Consejera de Educación, Universidades e Investigación del Gobierno vasco. *Boletín oficial del País Vasco.* País Vasco, 11 de septiembre de 2012, núm. 177.

Gobierno Vasco, Departamento de Educación (2020). Orden de 18 de febrero de 2020, de la Consejera de Educación, por la que se convocan procedimientos selectivos de ingreso y acceso al Cuerpo de Profesores y Profesoras de Enseñanza Secundaria, de ingreso al Cuerpo de Profesores Técnicos y Profesoras Técnicas de Formación Profesional y procedimiento de adquisición de nuevas especialidades por el personal funcionario de los citados Cuerpos de la Comunidad Autónoma del País Vasco. *Boletín oficial del País Vasco.* País Vasco, 27 de febrero de 2020, núm. 40.

Godino, J. D. (2010). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica*. Departamento de Didáctica de la Matemática: Universidad de Granada. Recuperado el 27 de marzo de 2023 de: https://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf

Guiñez, F., Vásquez, C., Brito, C. y Martínez, S. (2021). Alice in randomland: A resource for improving attitudes towards probability and its teaching. *Statistics Education Research Journal, 20*(2). https://doi.org/10.52041/serj.v20i2.410

Fennema, E. y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by males and females. *Journal for Research in Mathematics Education, 8*(5), 324-326. https://doi.org/10.2307/748467

Hokor, E. K. (2023). Probabilistic thinking for life: The decision-making ability of professionals in uncertain situations. *International Journal of Studies in Education and Science (IJSES), 4*(1), 31-54. https://doi.org/10.46328/ijses.44

Izagirre, A., Anasagasti J. y Berciano, A. (2023). La enseñanza de la probabilidad en secundaria, ¿una cuestión de actitud? En B. Berral, J.A. Martínez, D. Álvarez y J.J. Victoria (Eds.), Investigación e innovación educativa en contextos diferenciados (pp. 555-562). Editorial Dykinson.

Klinger, C.M. (2011). "Conectivism" A new paradigm for the mathematics anxiety challenge? *Adults Learning Mathematics: An International Journal, 6*(1), 7-19. https://www.learntechlib.org/p/161715/.

Marbán, J. M. (2016). Matemáticas y Dominio Afectivo. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 69-74). SEIEM.

Martins, J.A., Estrada, A., Nascimento, M.M. y Comas, C. (2015). Actitudes hacia la Estadística de los Profesores: un Camino a Recorrer. En J.M. Contreras, C. Batanero, J.D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2* (101-107). Granada.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). *Orden EFP/754/2022, de 28 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria en el ámbito de gestión del Ministerio de Educación y Formación Profesional.* Madrid.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L.J. y Valcke, M. (2016a). ¿Hay un vacío en la formación inicial del profesorado de matemáticas de Secundaria en España respecto a otros países? *Revista de educación, 372*, 111-140. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2015-372-317

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L.J. y Valcke, M. (2016b). Are future mathematics teachers ready for the profession? A pilot study in the Spanish framework. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 16*, 735-745. https://doi.org/10.15405/epsbs.2016.11.76

Muñiz-Rodríguez, L., Aguilar-González, A. y Rodríguez-Muñiz, L.J. (2020). Perfiles del futuro profesorad de matemáticas a partir de sus competencias profesionales. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(2), 141-161. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3161

Ncube, B. y Moroke, N. D. (2015). Students'perceptions and attitudes towards statistics in south African university: An exploratory factor analysis approach. *Journal of Governance and Regulation, 4*(3), 231-240. https://doi.org/10.22495/jgr_v4_i3_c2_p5

Peiró-Signes, Á., Trull, Ó., Segarra-Oña, M. y García-Díaz, J.C. (2020). Attitudes Towards Statistics in Secondary Findings from fsQCA. *Mathematcis, 8*(5), 804. https://doi.org/10.3390/math8050804

Persson, I., Kraus, K., Hansson, L. y Wallentin, F.Y. (2019). Confirming the structure of the survey of attitudes toward statistics (sats-36) by swedish students. *Statistics Education Research Journal, 18*(1), 83-93. https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ18(1)_Persson.pdf

Roberts, D.M. y Bilderback, E.W. (1980). Realiability and validity of a statistics attitudes surve. *Educational and Psychological Measurement, 40*, 235-238.

Rodríguez-Santero, J. y Gil-Flores, J. (2019). Actitudes hacia la estadística en estudiantes de ciencias de la educación. Propiedades psicométricas de la versión española del Survey of Attitudes Toward Statistics (SATS-36). *Relieve, 25*(1), 1-17. https://doi.org/10.7203/relieve.25.1.12676

Ruz, F., Berciano, A., Martínez-Ortiz, F. y Contreras, J.M. (2023). Perspectiva de género en actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza en futuro profesorado chileno. *Revista Educação e Pesquisa, 49*, e254527. https://doi.org/10.1590/S1678-4634202349254527es

Ruz, F., Molina-Portillo, E., Vásquez, C. y Contreras, J.M. (2020). Attitudes towards probability and its teaching in prospective mathematics teachers from Chile and Spain. *Acta Scientiae*, *22*(2), 48-66. https://doi.org/10.17648/ACTA.SCIENTIAE.5489

Schau, C. (2003). Survey of Attitudes Toward Statistics (SATS-36). Extraido de: http://evaluationandstatistics.com

Schau, C., Stevens, J., Dauphinee, T. L. y Del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the Survey of Attitudes toward Statistics. *Educational and Psychological Measurement 55*(5), 868–875.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J.M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics,* pp. 1-6.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L., Rowley, G., Peck, R., Bankov, K., Rodríguez, M. y Reckase, M. (2012). *Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M).* Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

Vásquez, C., Alvarado, H. y Ruz, F. (2019). Actitudes de futuras maestras de educación infantil hacia la estadística, la probabilidad y su enseñanza. (2019). *Educación Matemática, 31*(3), 177-202. https://doi.org/10.24844/em3103.07

Veloo, A. y Chairhany, S. (2013). Fostering students' attitudes and achievement in probability using teams-games-tournaments. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 93*, pp. 59-64. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.09.152

Wise, S.L. (1985). The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement, 45*, 401-405.

Autor de correspondencia

Jon Anasagasti Aguirre

Dirección postal: Facultad de Educación de Bilbao (UPV-EHU)
Barrio Sarriena s/n.
48940 Leioa (Bizkaia), España.
jon.anasagasti@ehu.eus

ANEXO

Tabla 2. Resultados de la escala ASPT y los respectivos Componentes en estudios previos.

Estudio	Muestra	Total ASPT		AP		CCP		BP		AT		CT		BT		VPT	
			D.E.		D.E.		D.E.		D.E.		D.E.		D.E.		D.E.		D.E.
Vásquez *et al.* (2019)	124 (fut. EI)	2.91		2.99		1.78		3.39		2.64		2.21		3.51		3.84	
Estrada *et al.* (2016)	71 (fut. EP)	3.7	.42	3.53	.85	3.73	.73	3.68	.83	3.68	.78	3.68	.68	3.98	.7	3.93	.65
Estrada *et al.* (2018)	232 (fut. EP)	3.66	.48	3.3	.73	3.28	.65	3.5	.65	3.5	.65	3.23	.55	3.88	.6	3.93	.58
Estrada y Batanero (2020)	416 (fut. EP)	3.63	.5	3.36	.72	3.33	.03	3.57	.66	3.53	.68	3.66	.61	3.92	.6	3.97	.57
Ruz *et al.* (2020)	126 (fut. ES)	3.73	.5	3.55	.8	3.47	.69	3.72	.75	3.5	.79	3.59	.81	3.89	.76	4.16	.66
Alvarado *et al.* (2018)	70 (EM) 51 (fut. EM)	3.89	.47	3.79	.72	3.75	.67	3.8	.66	4.06	.65	3.65	.71	4.12	.58	4.07	.61
Ruz *et al.* (2023)	269 (futES)	3.77	.43														

Tabla 5. Media y desviación típica de cada ítem de la escala ASPT en global y según la variable sexo.

Dimensión	Componente	Ítems	Media Global (N=185)	D.T. Global (N=185)	Media mujer (N=110)	D.T. mujer (N=110)	Media Hombre (N=72)	D.T. Hombre (N=72)
1. Actitudes hacia la probabilidad	Afectiva (AP)	1 Me divierto en las clases en las que se explica probabilidad.	3.91	0.940	3.88	0.965	3.97	0.919
		5 Me gusta la probabilidad; es un tema que siempre me ha interesado.	3.60	1.138	3.58	1.176	3.65	1.09
		16* Me siento intimidado o intimidada ante datos probabilísticos.	4.18	1.083	4.08	1.115	4.36	0.939
		27* No me agrada resolver problemas de probabilidad.	4.12	1.142	4.14	1.177	4.13	1.1
	Competencia cognitiva (CCP)	6 La probabilidad es fácil.	3.39	0.860	3.39	0.858	3.39	0.881
		8 Domino los principales contenidos de probabilidad.	4.14	0.793	4.1	0.812	4.18	0.775
		17* La probabilidad sólo la entienden la gente de ciencias.	4.24	0.937	4.24	0.918	4.22	0.982
		22* No me siento preparada o preparado para resolver cualquier problema básico de probabilidad.	4.30	1.076	4.22	1.12	4.42	1.017
	Comportamental (BP)	2 Utilizo información sobre probabilidad a la hora de tomar decisiones.	3.31	1.131	3.1	1.157	3.6	1.03
		7* Nunca he usado la probabilidad fuera de las matemáticas.	4.25	0.924	4.09	1	4.49	0.75
		15 Uso la probabilidad en la vida cotidiana.	3.10	1.074	2.97	1.113	3.29	0.999
		18* Evito leer las informaciones donde aparecen términos de probabilidad (en prospectos de medicamentos, etc.).	4.35	0.961	4.33	0.968	4.36	0.969

2. Actitudes hacia la enseñanza de la probabilidad	Afectiva (AT)	9 Pienso que me gusta enseñar probabilidad en el instituto.	3.88	1.069	3.81	1.113	4	1.007
		21* Me preocupa saber responder preguntas de probabilidad del alumnado.	3.64	1.274	3.59	1.244	3.71	1.326
		26* No tengo mucho interés en enseñar probabilidad aunque aparezca en el curriculum.	4.31	0.948	4.28	0.93	4.35	0.981
		28 Como docente creo que me siento cómodo o cómoda al enseñar probabilidad.	3.96	0.958	3.81	1.036	4.19	0.799
	Competencia didáctica (CT)	3* Es difícil para mí enseñar probabilidad.	4.06	1.056	4.11	1.07	4.01	1.055
		10 Creo que sé detectar y corregir errores y dificultades del alumnado con la probabilidad.	3.81	0.842	3.72	0.879	3.94	0.785
		14 Me resulta fácil diseñar actividades de evaluación de la probabilidad.	3.49	0.962	3.42	0.98	3.58	0.946
		23* Pienso que no soy capaz de preparar recursos didácticos apropiados para la clase de probabilidad.	3.81	1.119	3.87	1.118	3.71	1.131
	Comportamental (BT)	11* Sólo enseño probabilidad si me queda tiempo después de los otros temas.	3.86	1.269	3.86	1.337	3.87	1.186
		20 Se debería enseñar probabilidad en los primeros niveles de enseñanza.	3.65	1.016	3.71	0.961	3.58	1.11
		24 Cuando es pertinente, utilizo la probabilidad en otras materias que enseño.	3.07	1.152	3.04	1.173	3.12	1.138
		25* Si pudiera eliminar alguna materia, sería la probabilidad.	4.21	0.991	4.17	0.85	4.31	1.002
3. Valor a la probabilidad y su enseñanza	Valor (VPT)	4 La probabilidad ayuda a entender el mundo de hoy.	4.02	0.894	3.92	0.92	4.17	0.839
		12* La probabilidad sólo sirve para los juegos de azar.	4.64	0.677	4.58	0.709	4.72	0.633
		13* La probabilidad no tiene tanto valor como otras ramas de las matemáticas.	4.28	0.907	4.19	0.963	4.42	0.801
		19 Los conocimientos sobre probabilidad, ayudan al alumnado a razonar críticamente.	3.88	0.995	3.83	1.012	3.92	0.975

Nota: Para responder cada ítem se ha utilizado la escala de Likert de 1 (muy en desacuerdo) a 5 (muy de acuerdo). Los ítems con carácter negativo (marcados con *) se han invertido antes de realizar el cálculo estadístico.

 https://doi.org/10.24844/EM3603.07

Articuladores de los modos de pensar las superficies cuadráticas: Estudio hermenéutico

Modes of thinking' articulators of Quadratic Surfaces: Hermeneutic Research

Felipe Jacobo Alfaro,[1] Guadalupe Vera-Soria,[2]
Marcela Parraguez González[3]

Resumen: Se estudia la comprensión del concepto de superficies cuadráticas (SC) por parte de estudiantes universitarios, teniendo como sustento teórico el modelo de los modos de pensamiento Sintético-Geométrico (SG), Analítico-Aritmético (AA) y Analítico-Estructural (AE). Esta perspectiva propone que la comprensión de un concepto se logra al articular estos tres modos de pensar. El análisis de datos se dirige a examinar la evidencia extraída de seis entrevistas y cinco actividades aplicadas a seis estudiantes universitarios, para mostrar la construcción del concepto a través de los elementos matemáticos articuladores que se involucran al transitar entre los modos de pensar SG-SC, AA-SC y AE-SC. Los hallazgos revelan que, para establecer los primeros acercamientos a la comprensión de las SC, la interacción entre los modos SG-SC y AA-SC resulta indispensable, mientras que la transición al modo AE-SC requiere un pensamiento variacional mediante el cual, conjuntos de puntos ubicados en el espacio tridimensional se proyectan en un plano para configurar las trazas que constituyen a las SC.

Fecha de recepción: 17 de abril de 2023. **Fecha de aceptación:** 3 de julio de 2024.
[1] Universidad de Guadalajara, felipe.jacobo@academicos.udg.mx, https://orcid.org/0009-0003-7239-909X.
[2] Universidad de Guadalajara, guadalupe.vera@academicos.udg.mx, https://orcid.org/0000-0001-8294-6585.
[3] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, marcela.parraguez@pucv.cl, https://orcid.org/0000-0002-6164-3056.

Palabras clave: *comprensión conceptual; superficies cuadráticas; modos de pensamiento; articuladores; estudio hermenéutico.*

Abstract: The understanding of the concept of quadratic surfaces (SC) in undergraduate students is studied, having as theoretical support the model of the Synthetic-Geometric (SG), Analytical-Arithmetic (AA) and Analytical-Structural (AE) modes of thinking. This perspective proposes that the understanding of a concept is achieved by articulating these three modes of reasoning. The data analysis is aimed at examining the evidence extracted from six interviews and five activities applied to six undergraduate students, to show the construction of the concept through the articulating mathematical elements that are involved when moving between the SG-SC, AA-SC and AE-SC modes of thinking. The findings reveal that to establish the first approaches to the understanding of the SC, the interaction between the SG-SC and AA-SC modes is essential, while the AE-SC transition requires variational thinking through which, sets of points located in three-dimensional space are projected onto a plane to configure the traces that constitute the SC.

Keywords: *conceptual understanding; quadratic surfaces; modes of thinking; articulators, hermeneutic research.*

1. INTRODUCCIÓN

En esta investigación se analiza cómo es la comprensión de superficies cuadráticas (SC) por parte de estudiantes universitarios que desarrollan actividades de exploración del concepto con el uso del software *GeoGebra*. Las SC son gráficas de ecuaciones de segundo grado, consideradas como los análogos tridimensionales de las secciones cónicas (Larson & Edwards, 2016; Thomas, 2015) en geometría analítica del plano.

Hasta ahora, la mayoría de las investigaciones sobre el aprendizaje de la geometría analítica del espacio se enfocan en las funciones de dos variables y, por el contrario, la documentación sobre el razonamiento de los estudiantes respecto a las SC, prerrequisito curricular de dichas funciones, es limitada. No obstante, la comprensión de conceptos de la geometría tridimensional como planos, cilindros y superficies resulta fundamental para dar sentido a las ideas involucradas en el cálculo multivariado, en particular derivadas e integrales de funciones de varias variables, que a su vez se aplican en la solución de problemas del área de ciencias exactas e ingeniería.

Investigaciones realizadas en varios países, concuerdan en que la comprensión de objetos matemáticos representados en el espacio no es sencilla, ni puede abstraerse de forma directa o inmediata a partir de la generalización de las estructuras relacionadas con el plano bidimensional (Kashefi, Ismail & Yusof, 2013; Martínez-Planell & Trigueros, 2021; Şefik & Dost, 2020; Weber & Thompson, 2014), sino que precisa de trabajo intenso en casos particulares, que la presente investigación explora.

Martínez-Planell y Trigueros (2007, 2010, 2013 y 2019), por ejemplo, realizan varios estudios desde el marco teórico APOE y la teoría de las representaciones semióticas, para indagar sobre las construcciones mentales y dificultades que los estudiantes enfrentan en el aprendizaje de funciones de dos variables; llegando a establecer que las dificultades más comunes en dichas funciones ocurren por deficiencias en el discernimiento del esquema del espacio $\mathbb{R}^3$ y, en la construcción de gráficas de funciones de dos variables. Los autores señalan que es necesario reconocer la noción de planos fundamentales (verticales y horizontales de la forma $x = c$, $y = c$ y $z = c, c \in \mathbb{R}$) y las curvas obtenidas al sustituir valores por una variable en $z = f(x,y)$ (con $x,y,z \in \mathbb{R}^3$), localizadas en un plano coordenado correspondiente a las variables que quedan. Y es que, para graficar una función de dos variables, se debe poder identificar la intersección de planos fundamentales con la superficie que representa la función, y reconocer los cambios que se van produciendo en las secciones transversales que se forman con estas curvas obtenidas conforme se va cambiando sucesivamente el valor de la constante $c \in \mathbb{R}$ de planos fundamentales paralelos entre sí.

Por otra parte, Weber y Thompson (2014), con fundamento en los modelos del razonamiento covariacional y el razonamiento cuantitativo, analizan las respuestas a las tareas asignadas a dos estudiantes universitarios inscritos en un curso de cálculo, y verifican que mediante la aplicación de una trayectoria hipotética de aprendizaje propuesta se promueve la generalización de funciones de una a dos variables, al pensar o imaginar un gráfico obtenido al barrer un punto en el plano para generar una curva y luego, barrer esa curva para generar una superficie en el espacio.

Y en relación con la comprensión de las SC, López-Vega (2018) describe el análisis *a priori* y *a posteriori* de las respuestas a las actividades de un estudiante de Arquitectura de una Universidad en Lima, en las que se explora el proceso de génesis instrumental del hiperboloide, cuando se desarrolla una secuencia didáctica mediada por el software *GeoGebra*. En ese estudio, se establece que el uso del *GeoGebra* posibilita el reconocimiento de propiedades del hiperboloide, como reconocer la relación entre la ecuación y la orientación de la superficie, la identificación de cómo afectan los parámetros de su ecuación a la superficie y determinar las características del hiperboloide a partir de los cortes en secciones transversales.

En la presente investigación, se asume que la comprensión de objetos en tres dimensiones que se representan en objetos figurales de dos dimensiones requiere de un razonamiento sintético (objeto figural que la representa) y analítico (ecuación que la describe) para transitar entre diferentes elementos matemáticos implicados en su abstracción. Con base en esto último, se tiene como objetivo de investigación: describir los modos de pensar las SC que estudiantes universitarios usan en situaciones matemáticas propuestas y determinar los tránsitos que ellos logran entre diferentes interpretaciones de las SC, poniendo de relieve los elementos matemáticos que involucran en ese proceso.

2. LOS MODOS DE PENSAMIENTO

Para Sierpinska (2000), los modos de pensamiento son formas de ver y entender los objetos matemáticos que al interactuar producen su comprensión. Cada modo de pensar conduce a diferentes significados de un objeto matemático, porque cada modo implica diferentes interpretaciones de dicho objeto –teóricas y prácticas– y sus conexiones con otros sistemas de hechos e ideas. Por otro lado, la complejidad epistemológica inherente al pensamiento teórico justifica las dificultades que los estudiantes muestran para aprender la matemática en todos los niveles, mientras que los argumentos geométricos y sintéticos son, a la vez, un apoyo visual y un desafío (Sierpinska, 2000); de ahí la necesidad de estudios científicos que expliciten el rol de estas formas de pensar involucradas en la interpretación de conceptos matemáticos.

En el modo Sintético-Geométrico (SG) la visualización matemática toma un rol fundamental en el entendimiento de un objeto matemático, es decir, se perciben las características geométricas de funciones, coordenadas, vectores, etc., representados por medio de imágenes donde se "utiliza el lenguaje de las figuras geométricas, planos, líneas, intersecciones, así como sus representaciones gráficas convencionales" (Sierpinska, 2000, p. 234-235). Por ejemplo, en este modo SG, un elipsoide es identificado por su representación gráfica y la descripción figural de esta superficie cuadrática, sin definirla a través de su ecuación.

Y en el modo Analítico-Aritmético (AA) los objetos matemáticos se construyen por la definición de sus elementos. Las figuras se entienden como conjuntos de n-tuplas de números que satisfacen ciertas condiciones y en general, los objetos matemáticos se dan por relaciones, operaciones y procedimientos con números y variables (Sierpinska, 2000). Por ejemplo, en el modo AA una esfera es entendida a través de la ecuación $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ que relaciona sus diferentes variables y parámetros.

Mientras que el modo Analítico-Estructural (AE), sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de conjuntos estructurales. Los objetos matemáticos se explican a partir de propiedades, características, axiomas o definiciones más generales que se agrupan en estructuras (Sierpinska, 2000). Por ejemplo, en el modo AE las SC son construidas como un lugar geométrico conformado por familias de curvas donde se diferencian los rasgos que las caracterizan.

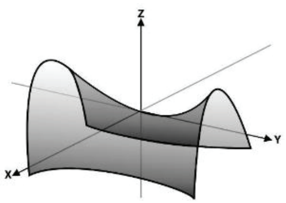
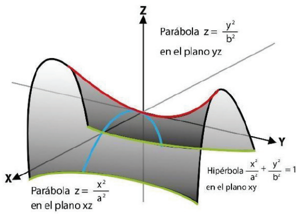
La diferencia entre el modo sintético y analítico (aritmético y estructural) es que en el modo sintético los objetos son dados directamente por la mente cuando se trata de describirlos; mientras que, en el modo analítico se dan indirectamente y solo son construidos a través de la definición de las propiedades de sus elementos. Una manera de coadyuvar en la comprensión de un objeto o concepto matemático es mediante la promoción de transiciones e interacciones entre estos tres tipos de pensamiento (Sierpinska, 2000). Parraguez (2012) indica que "para esta teoría comprender un objeto matemático es poder abordarlo articuladamente desde los modos SG, AA y AE" (p. 76); y en este sentido, es importante diseñar situaciones o actividades de aprendizaje que contemplan la interacción entre los modos de pensar un objeto matemático, para luego explicitar y evocar los elementos matemáticos que actúan como articuladores, que son precisamente los que permiten a los estudiantes transitar exitosamente entre los tres modos de pensar ese objeto.

Aunque un estudiante puede utilizar cada uno de los tres modos de pensamiento, se tiene tendencia a usar algunos que son más significativos y, por lo tanto, parecen más convenientes y fáciles de entender (Sierpinska, 2000).

2.1. Modos de Pensar las Superficies Cuadráticas

En la tabla 1 se caracterizan los modos de pensar las SC: mientras en el modo de pensamiento SG-SC se reconocen formas o figuras en el espacio tridimensional, en el modo AA-SC se identifica una ecuación que relaciona diferentes variables y parámetros; y en el modo AE-SC, se identifican familias de curvas que conforman una SC y se ponen de relieve los rasgos que caracterizan a las diferentes SC.

Tabla 1. Los modos de pensar las SC

Sintético-Geométrico (SG-SC)	Analítico-Aritmético (AA-SC)	Analítico-Estructural (AE-SC)
	$z = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2}$	

Esta clasificación, surge de las distintas perspectivas de las SC que se advierten en el desarrollo del concepto: (1) en un primer momento, en la Grecia antigua, alrededor del año 200 a.C., Arquímedes estudia las características geométricas de sólidos de revolución (figuras generadas al girar elipses y parábolas sobre su eje de simetría, y por hipérbolas que giran alrededor de un eje transversal) (Lowell, 1968); (2) posteriormente, durante los siglos XVII y XVIII, a partir de la introducción del uso de coordenadas cartesianas en los escritos de Descartes, se produjo un segundo momento cuando Van Shooten, Fermat y Euler analizan las SC en el espacio tridimensional en relación con las ecuaciones de segundo grado en tres variables que las definen (Boyer, 1968; Kline, 1972); (3) y finalmente, se contempla un tercer momento a principios del siglo XIX con la aportación del trabajo de Monge y Hachette al estudio de las propiedades que definen a las SC (Lowell, 1968).

3. MÉTODO

Este estudio es de corte cualitativo, bajo la aproximación específica del método hermenéutico-interpretativo (Weiss, 2017) y se desarrolla en tres etapas.

3.1. Primera etapa

Se realiza una revisión bibliográfica de antecedentes y el análisis epistemológico de las SC por medio del cual se caracterizan los modos de pensar SG-SC, AA-SC y AE-SC (tabla 1). Asimismo, se diseñan actividades de exploración del concepto que incluyen el uso del software educativo *GeoGebra*.

Se plantea el uso del *GeoGebra* por su potencial expresivo para ilustrar las características del concepto en los modos SG-SC, AA-SC y AE-SC. Por ejemplo, en la actividad de exploración llamada "Trazas de Superficies Cuadráticas en *GeoGebra*" (figura 1), se incluye el uso de *applets* para apoyar a los estudiantes en el análisis de la relación entre ecuaciones cuadráticas y las gráficas que reflejan las condiciones de conjuntos de puntos y curvas en el espacio que configura a las SC.

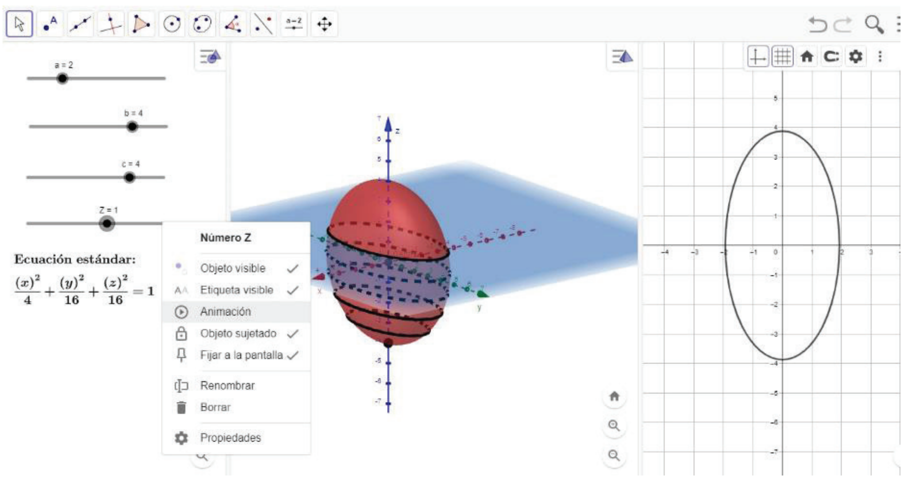


Figura 1. Actividad de exploración de Superficies Cuadráticas en *GeoGebra*

Las indicaciones en la actividad de exploración consideran centrar la atención sobre elementos matemáticos específicos, como el conjunto de curvas en el espacio que se configuran por puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ (figura 2). En relación con estos últimos, se había verificado previamente que satisfacen una ecuación de segundo grado.

b) ¿Qué pasa cuando se le dan a z valores positivos más grandes que 4 o menores que -4?

____

____

c) Anota las ecuaciones de los planos paralelos a XY cuya intersección con la superficie cuadrática $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$, sea un punto: ______________________________

d) En el *GeoGebra*, posiciónate en la vista Gráfica 3D. Selecciona en la figura la traza de la elipse y con el botón derecho elige rastro, además posiciónate sobre el deslizador de Z y dando clic con el botón derecho elige animación. Observa la familia de curvas que constituyen al elipsoide.
Para detener la animación presiona la flecha de "deshacer" que se encuentra en la esquina superior derecha de la pantalla.

e) Con ayuda de las observaciones anteriores, dibuja en el espacio de tres dimensiones algunas elipses de intersección, incluidas las de los incisos a) y c), para formar una familia de curvas que constituyen al elipsoide $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$.

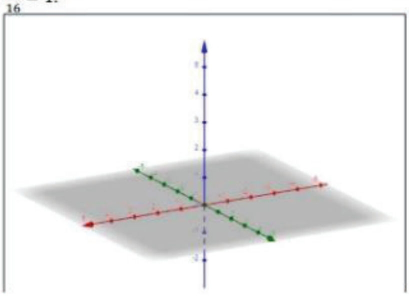


Figura 2. Indicaciones en la actividad de Trazas de Superficies Cuadráticas en *GeoGebra*

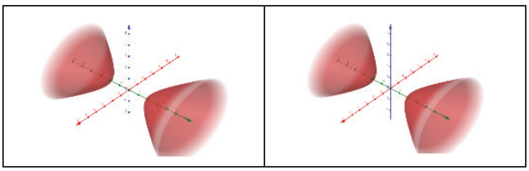
3.2. Segunda etapa

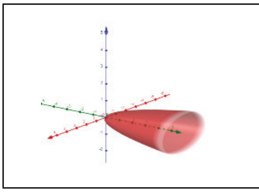
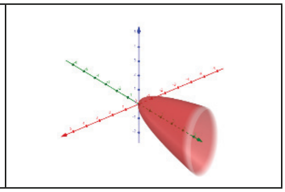
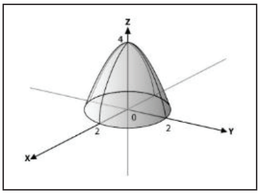
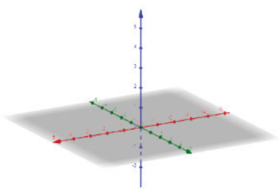
En la segunda etapa del estudio, una vez que los estudiantes revisaron los conceptos de gráficas de ecuaciones generales de segundo grado en dos variables en $\mathbb{R}^2$ (cónicas) y gráficas de planos y cilindros en $\mathbb{R}^3$, se implementaron las actividades didácticas diseñadas en un grupo de 38 estudiantes universitarios del área de ciencias e ingenierías (32 hombres y 6 mujeres), de entre 19 y 21 años de edad, inscritos en un curso de Cálculo de Varias Variables en una universidad pública estatal en México. De estos, seis estudiantes etiquetados como E1, E2, E3, E4, E5 y E6, se eligieron para participar en entrevistas, de acuerdo con los diferentes modos de pensar las SC y los elementos matemáticos que mostraron en sus respuestas.

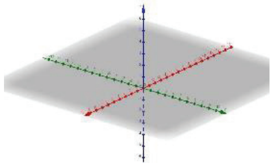
Después de dar a conocer las intenciones de la investigación, los estudiantes manifestaron su disposición para participar en el estudio mediante un consentimiento informado. El tipo de muestreo que se lleva a cabo es de muestras diversas (Hernández *et al.*, 2010), dado que se pretende evaluar los elementos matemáticos que estudiantes con diferentes respuestas involucraron al transitar entre los distintos modos de pensar las SC.

Las técnicas utilizadas para recopilar información, en concordancia con el diseño hermenéutico-interpretativo, fueron el análisis de documentos y la entrevista. El instrumento de recolección de datos se conforma de cinco preguntas y tiene la finalidad de evidenciar el trabajo de los estudiantes en los diferentes modos de pensar las SC (tabla 2).

Tabla 2. Preguntas en las actividades de análisis

Actividad	Pregunta	Modos de pensar y tránsitos a observar
A1	A continuación, se da la gráfica de la superficie cuadrática $-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$. En la gráfica de la izquierda identifica y marca los puntos donde ésta interseca con los planos $y=3$, $y=-2$. En la gráfica de la derecha identifica y marca los puntos donde ésta interseca con los planos $z=0$, $z=2$. 	SG-SC

A2	Escribe debajo de cada una de las siguientes figuras la ecuación que les corresponde. Elige entre $y = x^2 + 4z^2$, $y = x^2 + \frac{z^2}{4}$, $4y = x^2 + z^2$, $y = 4x^2 + z^2$. Describe con detalle el motivo de tus elecciones.   Ecuación: ____________ Ecuación: ____________ Describe con detalle el motivo de tus respuestas anteriores. Imagina que quieres explicar tus resultados a un compañero que apenas inicia el aprendizaje del tema.	SG-SC – AA-SC → AE-SC
A3	Considera la superficie cuadrática de la siguiente figura:  Dibuja y describe verbalmente lo más detalladamente posible, la curva de intersección de la superficie cuadrática con el plano $z = 1$.	SG-SC → AE-SC
A4	Representa en el espacio tridimensional la superficie cuadrática $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$. Luego traza y describe detalladamente la curva de intersección de la superficie con el plano $y = 1$.  Descripción:	AA-SC → AE-SC

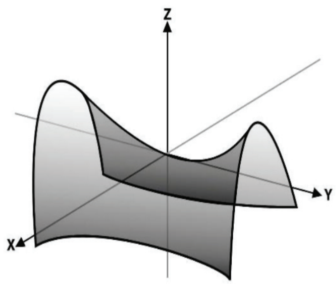
	Transforma la ecuación general a la forma estándar correspondiente y luego identifica la superficie cuadrática. Dibuja su gráfica y descríbela mediante algunas de sus trazas.		
	Transformar a la ecuación estándar	**Gráfica**	
A5	$x^2 + y^2 - 4z^2 + 4x - 6y - 8z = 7$ Ecuación estándar: Nombre:	 Describir la gráfica mediante algunas de sus trazas:	AA-SC → SG-SC → AE-SC

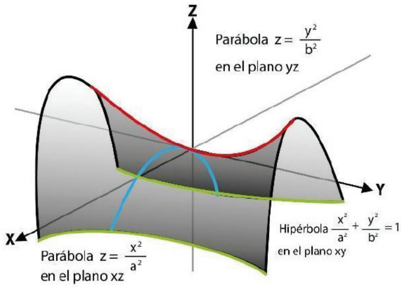
Complementario a las cinco preguntas anteriores, se conducen seis entrevistas semiestructuradas (Kvale, 2011), a estudiantes que realizaron las actividades didácticas y que involucraron distintas tendencias al responder las preguntas de la tabla 2. De manera específica, se propone la técnica de entrevista semiestructurada debido a que, aunque se cuenta con un guion para orientar las preguntas del entrevistador, se tiene libertad para realizar cuestionamientos adicionales con el fin de clarificar o ampliar las declaraciones de los informantes. El guion de las entrevistas incluye: (1) las descripciones que los estudiantes refieren sobre las gráficas y las ecuaciones de las superficies cuadráticas con las que se les propuso trabajar, (2) si las ideas representadas son utilizadas en un modo aislado o si se conectan diferentes modos de pensamiento, y (3) la manera en que se transita entre diferentes modos de pensar las SC mediante distintos elementos matemáticos como: trazas, simetrías, sustitución de valores de variables, parámetros, proyecciones, entre otros.

3.3. Tercera etapa

En esta etapa se realizó el análisis de los elementos matemáticos involucrados en los tránsitos entre los diferentes modos de pensar las SC, que se identifican en las respuestas de los estudiantes a las actividades de la tabla 2 y en los extractos de las transcripciones de las entrevistas. En la tabla 3 se especifican los elementos matemáticos considerados como evidencia observable del trabajo de los participantes en los distintos modos de pensar las SC.

Tabla 3. Elementos matemáticos observables en los modos de pensar las SC

Modos de pensamiento	Elementos matemáticos
SG-SC	 Puntos, líneas y /o curvas que forman una figura o forma determinada en el espacio tridimensional Referir simetría o proporciones, es decir, describir qué tanto abre hacia arriba o hacia abajo, a la izquierda o hacia la derecha a partir de un eje o el vértice una figura en el espacio, o de su proyección en un plano bidimensional.
AA-SC	$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ Ecuación general Ecuación estándar Parámetros, signos, coeficientes y/o exponentes de las expresiones que componen las ecuaciones Operaciones con valores de variables

AE-SC	 Superficie generada por trazas (parábolas, circunferencias, elipses e hipérbolas) análogamente situadas en el espacio tridimensional, donde cada una de estas secciones cónicas se configuran por puntos (x, y, z) en R^3 que satisfacen una ecuación de segundo grado.

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

Con base en el modelo teórico que fundamenta esta investigación, se postula que la comprensión de un concepto se logra al transitar articuladamente por los tres modos de pensamiento SG, AA y AE. En los resultados que a continuación se reportan, obtenidos al analizar las respuestas de los estudiantes en las actividades y las transcripciones de las entrevistas, se describe explícitamente la manera en que se logra la articulación entre los diferentes modos de pensar las SC, mediante distintas rutas cognitivas y los elementos matemáticos involucrados en esos tránsitos.

La tabla 4 muestra las diferentes rutas cognitivas interpretadas a través de los modos de pensar las SC, obtenidas como resultado de la evaluación y valoración de los argumentos de E1, E2, E3, E4, E5 y E6 al responder las cinco actividades de análisis y la entrevista.

Tabla 4. Tránsitos entre los Modos de Pensar las SC en las Actividades

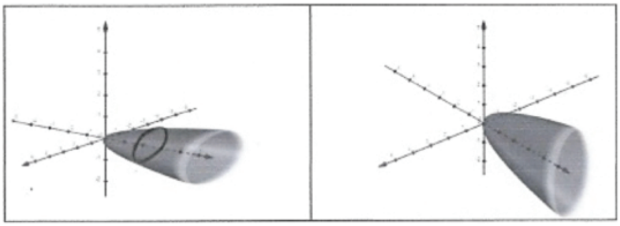
Estudiante \ Actividad	A1	A2	A3	A4	A5
E1	SG → AA → AE	SG → AA → AE	SG → AA Insuficiente → AE Falso	AA → SG → AE	AA → SG → AE Insuficiente
E2	No responde	SG → AA Falso	SG → AA Insuficiente → AE Falso	SG → AA Insuficiente → AE Falso	AA → SG
E3	SG → AA → AE	AA → SG → AE	SG → AA → AE	AA → SG → AE	AA → SG → AE
E4	SG Insuficiente → AA → AE Falso	SG → AA → AE	SG → AA → AE	AA → SG → AE	AA → SG → AE
E5	SG → AA → AE	SG → AA Falso	SG → AA Falso	AA → SG Insuficiente	AA → SG → AE Falso
E6	SG → AA → AE	SG → AA → AE	SG → AA → AE	AA → SG → AE	AA → SG → AE

A continuación, se describen las respuestas en las cinco actividades marcadas en color en la tabla 4, debido a que son representativas de los tránsitos entre los modos de pensar las SC que mostraron los estudiantes en sus diferentes respuestas.

4.1. Tránsitos desde AA-SC → SG-SC → AE-SC y de SG-SC → AA-SC → AE-SC

Los estudiantes que alcanzan el modo de pensar AE-SC, inician desde cualquier otro modo mediante las rutas cognitivas AA-SC → SG-SC → AE-SC y SG-SC → AA-SC → AE-SC, lo que se verifica al considerar y comparar los argumentos que los estudiantes exponen al desarrollar las actividades y participar en las entrevistas. Por ejemplo, el estudiante E3 sigue la ruta cognitiva AA-SC → SG-SC → AE-SC en la actividad A2. E3 comienza de la *ecuación general* de segundo grado de la SC $y = x^2 + 4y^2$ (modo AA-SC), en la cual realiza una *transformación algebraica* para expresarla en *forma estándar* y verificar sus *parámetros* (figura 3).

Escribe debajo de cada una de las siguientes figuras la ecuación que les corresponde. Elige entre $y = x^2 + 4z^2$, $y = x^2 + \frac{x^2}{4}$, $4y = x^2 + z^2$, $y = 4x^2 + z^2$. Describe con detalle el motivo de tus elecciones.



Ecuación: $y = x^2 + 4z^2$ Ecuación: $y = 4x^2 + z^2$

Describe con detalle el motivo de tus respuestas anteriores. Imagina que quieres explicar tus resultados a un compañero que apenas inicia el aprendizaje del tema.

· De la primera ecuación, podemos reescribirla:

$$y = \frac{x^2}{1} + \frac{z^2}{\frac{1}{4}} = \frac{x^2}{1^2} + \frac{z^2}{(\frac{1}{2})^2}$$

Figura 3. Respuesta de E3 en la A2

Con esto, E3 señala las *simetrías* que percibe de manera intuitiva en el paraboloide elíptico respecto a los ejes *X* y *Z*, como se muestra en la figura 4.

Sabemos que "y" es lineal porque es el eje de simetria del paraboloide eliptico, y en el caso del primero, el semieje en "x" es mayor que el de "z", caso contrario que en la 2do, que tiene el semieje mayor en "z".

Figura 4. Respuesta de E3 en la A2

Luego, el estudiante E3 *sustituye* $y = 2$ para obtener una *ecuación de dos variables* en la que identifica los *parámetros* con los que transita al modo de pensar SG-SC, al establecer las *simetrías* de una *curva de intersección* (elipse) que *proyecta* en un plano bidimensional (*XZ*) (figura 5).

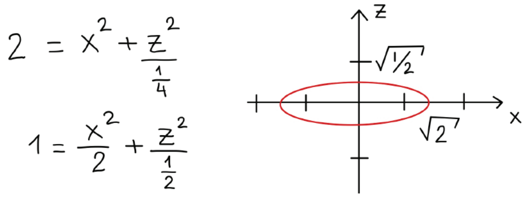


Figura 5. Respuesta de E3 en la A2

Posteriormente, en la intersección de la superficie con un *plano en el espacio,* E3 ubica el conjunto de puntos que configuran una *traza* (*variabilidad de puntos*), y reconoce que "depende del valor que tome *Y*" se podrían generar diferentes trazas situadas análogamente en el espacio (*variabilidad de trazas*) con las cuales se configura la SC (modo AE-SC), como se muestra en el siguiente extracto de la entrevista:

Entrevistador:	Entonces, ¿Cómo pudiste ver que efectivamente esas elipses corresponden con la ecuación de ese paraboloide?
E3:	Mjum.
Entrevistador:	¿Cómo se vería eso gráficamente?
E3:	¿En el plano o...?
Entrevistador:	O en la gráfica de la superficie.
E3:	Sí... ehhh. Dependería del valor que tome *Y*...
Entrevistador:	Y en la superficie ¿Cómo podría verse?
E3:	Ajá. Estaría como *Y* es igual a 2, pues los tendríamos más o menos a esta altura, y serían los puntos que van alrededor. Así. (Dibuja la traza sobre el paraboloide de la izquierda, figura 6)

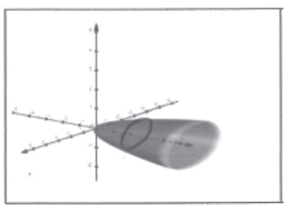


Figura 6. Respuesta de E3 en la A2

Entrevistador:	Ajá.
E3:	Sí... si *Y* fuera cero, pues en el plano se vería nada más un punto.

Entrevistador:	Mjum.
E3:	Sí. Si Y pues fuera un valor más...
Entrevistador:	Por ejemplo, dos.
E3:	Ajá. Si fuera dos....
Entrevistador:	¿Cómo sería?
	...
E3:	Entonces nos quedaría en ese punto, en Y igual a 2, una elipse que abre raíz de dos, o sea, el semieje de... de X, es raíz de dos y en Z la raíz de un medio (1/2).

Por otra parte, los tránsitos que muestra el estudiante E6 en la actividad A3 son SG-SC → AA-SC → AE-SC. En esta actividad se solicita que el estudiante dibuje y describa verbalmente, la curva de intersección de un paraboloide elíptico con el plano fundamental $z = 1$, y para responderla E6 se sitúa en el modo SG-SC al reconocer la *forma de la superficie cuadrática* (figura 7), a partir de la cual identifica algunas *transformaciones gráficas* que relaciona con la *fórmula de la ecuación estándar* para establecer los *parámetros* de la ecuación del paraboloide (modo AA-SC).

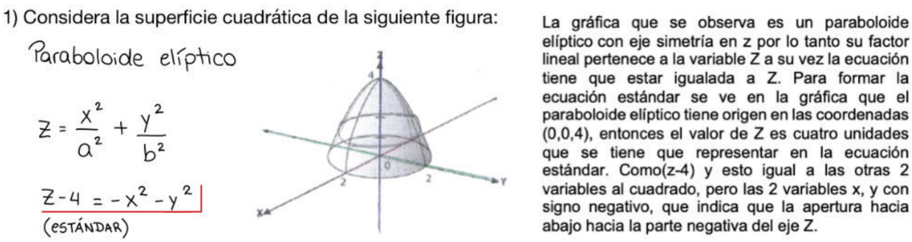


Figura 7. Respuesta de E6 en la A3

Para esto, E6 señala en la entrevista que con el fin de verificar que la ecuación estándar que había identificado correspondía la del paraboloide, *sustituye* $z=0$ en ella para obtener la *ecuación de dos variables* que representa la curva de intersección del paraboloide con el plano *XY*, y con esto E6 comprueba que los *parámetros* de la ecuación obtenida se relacionan con la circunferencia representada en dicha intersección, como se verifica en el extracto de la entrevista:

E6: [...] Ok, primeramente, esta es mi fórmula general de la circunferencia ¿no? Cuando Z es igual a cero, esa tendría que ser cuatro. Porque al sacar la raíz cuadrada te da dos y ese sí es el radio. (figura 8)

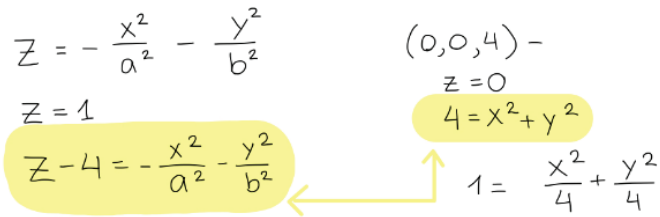
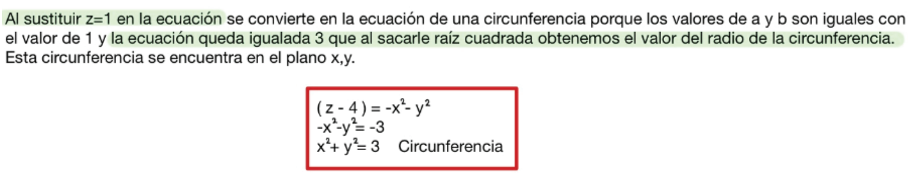


Figura 8. Respuesta de E6 en la A3

Entrevistador: Ah, muy bien.

E6: Y entonces, ahora sí, ahora ya que tengo esta, ese es cuando Z vale cero... Ok. Y entonces, ahora, entonces [murmura procedimiento] entonces esta tendría que ser mi fórmula para el paraboloide elíptico.

Después, E6 *sustituye* $z = 1$ en la ecuación $z - 4 = -x^2 - y^2$ para determinar una *ecuación de dos variables*, cuyos *parámetros* ayudan a *proyectar* la curva de intersección en un plano bidimensional (figura 9).



Al sustituir z=1 en la ecuación se convierte en la ecuación de una circunferencia porque los valores de a y b son iguales con el valor de 1 y la ecuación queda igualada 3 que al sacarle raíz cuadrada obtenemos el valor del radio de la circunferencia. Esta circunferencia se encuentra en el plano x,y.

$(z - 4) = -x^2 - y^2$
$-x^2 - y^2 = -3$
$x^2 + y^2 = 3$ Circunferencia

Figura 9. Respuesta de E6 en la A3

El hecho de realizar esa sustitución, le permite a E6 ubicar un *plano en el espacio* a través del conjunto de puntos que configuran a la traza (*variabilidad de puntos*), según se verifica en las respuestas de E6 en la entrevista:

E6: [...] Entonces, si Z va a ser igual a uno entonces me va a quedar una traza en el plano XY.

Entrevistador: ¿Cuál sería esa traza?

E6: Bueno, aquí, ah, ésta es cuatro ¿no?

Entrevistador: Ajá.

E6: Pues más o menos sería dividirlo como en cuatro partes, ahí más o menos, pues este sería el uno. Z igual a uno, entonces se cree... Haría más o menos un círculo como por aquí.

...

E6: Pues sería todo lo del conjunto de puntos que se encuentran en esta traza, donde el radio, cuando, bueno en la coordenada, en este caso sería para cuando Z vale uno, esto sería cuando Z vale uno, y serían todos los conjuntos de puntos que estén en la circunferencia.

En suma, se identifica que en el tránsito desde AA-SC hacia SG-SC se incorporan los elementos matemáticos articuladores: *ecuación general − transformación algebraica − ecuación estándar − parámetros − simetrías − sustitución − ecuación de dos variables − parámetros − simetrías − curva de intersección*; mientras que desde SG-SC hacia AA-SC los articuladores que se reconocen son: *forma de la superficie − transformaciones gráficas − fórmula de la ecuación estándar − parámetros − sustitución − ecuación de dos variables − parámetros − ecuación estándar*. Estos elementos matemáticos en las aproximaciones iniciales al comparar las gráficas y ecuaciones con las que se les propone trabajar incluyen articuladores tanto del modo SG-SC como del modo AA-SC (tabla 3), que interactúan para interpretar la información que se percibe en los primeros acercamientos a la comprensión del concepto de SC.

Por otra parte, desde el modo SG-SC hacia AE-SC los elementos articuladores que se registran son: *proyección − plano en el espacio − variabilidad de puntos en el espacio − traza − variabilidad de trazas*, y desde el modo AA-SC hacia AE-SC se identifican los articuladores: *sustitución − ecuación de dos variables − parámetros − proyección − plano en el espacio − variabilidad de puntos en el espacio − traza*; de donde se advierte que en los tránsitos hacia AE-SC los articuladores comunes que se involucran son: *proyección, plano en el espacio* y *variabilidad.*

4.2. Dificultades en el modo de pensamiento AA-SC o SG-SC y su implicación para el modo AE-SC

Respecto a los estudiantes que presentan dificultades para trabajar en los elementos que describen el modo de pensar SG-SC o AA-SC, se reconoce que no abordan el modo de pensar AE-SC, al evidenciar las siguientes rutas cognitivas: SG-SC → AA-SC Insuficiente → AE-SC Falso y SG-SC Insuficiente → AA-SC → AE-SC Falso.

Como se señala en la tabla 2, la intención de la actividad A4 es verificar los posibles tránsitos desde el modo AA-SC hacia el modo AE-SC. En esa actividad se solicita representar en el espacio tridimensional la superficie cuadrática con ecuación $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ y que se trace y describa la curva que se forma en la intersección de la superficie con el plano $y = 1$. Para responder esta actividad, el estudiante E2 desarrolla la ruta SG-SC → AA-SC Insuficiente → AE-SC Falso. Aunque esta actividad se presenta desde el modo AA-SC, E2 inicia en el modo de pensar SG-SC, cuando introduce la ecuación general de la superficie y la ecuación del plano en el software *GeoGebra*, para observar la *forma de la superficie* y la *forma de la curva de intersección* de la superficie con el plano. Luego, a partir de sus observaciones E2 reconoce la figura de un elipsoide y aunque intenta realizar una transformación algebraica de la ecuación $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ para obtener los valores *a*, *b* y *c* en la *fórmula de la ecuación estándar* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, con los que pretende justificar las simetrías que observa en la figura de A4, solo llega a determinar el valor del parámetro *c* de la ecuación estándar, como se interpreta en el extracto de la entrevista:

E2: [Anota en el *GeoGebra* la ecuación para obtener la gráfica] Pues ese es un elipsoide. Entonces en un elipsoide con un plano en Y, es igual a Y, igual a uno [dibuja en *GeoGebra* el plano $y = 1$]... (figura 10)

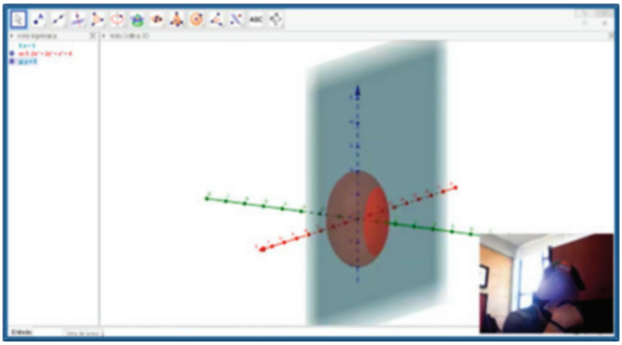
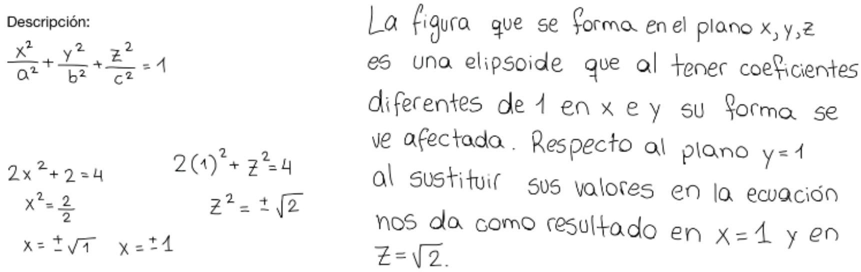


Figura 10. Respuesta de E2 en la A4

Ok. La curva... intersección... entonces ahí sí creo que tenemos que describir esta figura que está aquí. Es una elipse. Aquí ya podemos identificar que es un elipsoide, así que la ecuación estándar sería X al cuadrado más Y cuadrada, más Z al cuadrado igual a cuatro, digo, igual a uno, sobre *A*, sobre [ininteligible], sobre C cuadrada. Ok. Esto igualada a uno. Este es igual a cuatro, significa que esta ecuación estándar fue multiplicada por cuatro para que diera esto. Entonces todo esto se multiplicó por cuatro y para sacar los valores de *a, b*, y *c* [...]. Más bien como estos son dos, se debió de haber sido dividido por cuatro porque ese es el único que no tiene un coeficiente aquí al lado, que sería el dos, por lo tanto, Z... C es el que debe de valer dos y el cuadrado sería cuatro. Entonces, para eliminar este cuatro se multiplicó todo por cuatro y también este, entonces... esa es la figura que hice, ¿edá? aquí. [Murmura, ininteligible]

De esta manera, E2 identifica únicamente *uno de los parámetros de la ecuación estándar*, por lo que que transita a un modo AA-SC Insuficiente. Luego, *sustituye* que $y = 1$ en la ecuación general para obtener una *ecuación de dos variables* en la cual vuelve a sustituir para $z = 0$ y para $x = 0$ respectivamente, y determinar *valores de variable* con los que confirma las *simetrías* de la elipse que se forma en la intersección de la superficie con el plano (figura 11).



Descripción:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$2x^2+2=4 \qquad 2(1)^2+z^2=4$$

$$x^2=\frac{2}{2} \qquad z^2=\pm\sqrt{2}$$

$$x=\pm\sqrt{1} \quad x=\pm 1$$

La figura que se forma en el plano x, y, z es una elipsoide que al tener coeficientes diferentes de 1 en x e y su forma se ve afectada. Respecto al plano y = 1 al sustituir sus valores en la ecuación nos da como resultado en x = 1 y en z = $\sqrt{2}$.

Figura 11. Respuesta de E2 en la A4

Asimismo, a partir de las simetrías que percibe, E2 dibuja un cilindro elíptico y señala que a lo largo del cilindro "Y vale uno" porque es constante, es decir, no identifica que la traza se ubica en la intersección de la superficie con el plano $y = 1$ y no logra advertir que y tiene diferentes valores a lo largo del cilindro (figura 12), por lo que llega a transitar a un modo de pensar AE-SC Falso.

E2: Esta es la superficie cuadrática, esta es la intersección del plano Y igual a uno con esta superficie, nada más que yo la estoy proyectando en toda esta parte, pero pues es lo mismo porque Y vale uno en toda esta parte. Y es constante, por lo tanto, pues es una proyección de todo esto y aquí sería el plano… Bueno es que no sé cómo hacer el plano… ese sería el plano [traza en la figura el plano $y = 1$ que está representado en GeoGebra]… este es el plano Y igual a uno que al cortar con la superficie cuadrática nos da esta figura, pero se puede proyectar por toda esta parte porque Y es constante y nos seguirá saliendo esa misma figura.

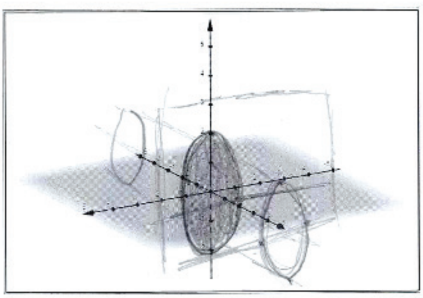


Figura 12. Respuesta de E2 en la A4

Por otra parte, en la actividad A1 se presentan dos gráficas de un mismo hiperboloide de dos hojas junto con su ecuación estándar ($-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$) y se solicita a los estudiantes identificar y marcar en las gráficas los puntos de intersección de la superficie con diferentes planos fundamentales; por lo que para responder esta actividad, el estudiante E4 que presenta los tránsitos SG-SC Insuficiente → AA-SC → AE-SC Falso, comienza dibujando en el hiperboloide de la izquierda las *curvas de intersección* de la superficie con los planos $y=3$ y $y=-2$ (una elipse y un punto), mientras que en el de la derecha solo ubica tres puntos en el eje de las z, en vez de trazar las hipérbolas que se forman en la intersección de la superficie con los planos $z=0$ y $z=2$ (figura 13).

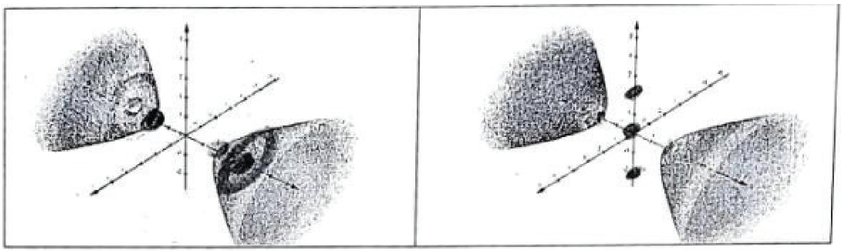


Figura 13. Respuesta de E4 en la A1

Posteriormente, durante la entrevista a E4, dibuja de nuevo sin dificultad la elipse y el punto que representan las intersecciones en el hiperboloide de la izquierda de A1 y *no logra ubicar las hipérbolas correspondientes en la gráfica de la derecha de A1*, por lo que se solicita argumentar sus respuestas. El estudiante utiliza la *ecuación estándar* que se presenta en la instrucción de la actividad para señalar que si se *sustituye* primero $y=3$ y después $y=-2$ en esa ecuación, se obtienen como resultado las *ecuaciones de dos variables* (modo AA-SC) correspondientes a la elipse y al punto que había identificado geométricamente (figura 14).

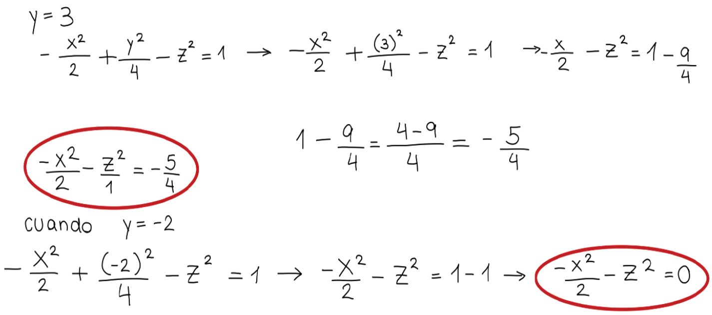


Figura 14. Respuesta de E4 en la A1

Así mismo, E4 *sustituye* en la ecuación de dos variables de la elipse $x = 0$ y $z = 0$ para *obtener valores de variable* con los que justifica las *simetrías* de la curva de intersección (elipse) que *proyecta* en un plano bidimensional (figura 15) y que había ubicado inicialmente en el espacio de tres dimensiones.

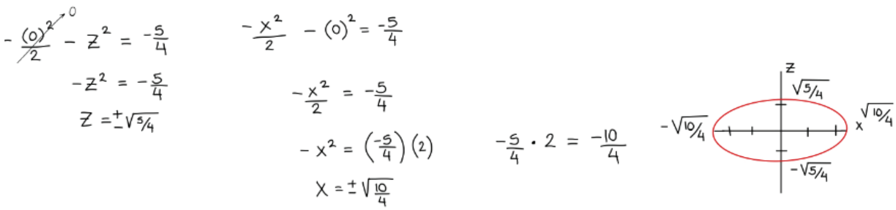


Figura 15. Respuesta de E4 en la A1

Respecto a la intersección de los planos $z = 0$ y $z = 2$ con el hiperboloide de la derecha de A1, E4 manifiesta una serie de argumentos en los que señala que la forma de las curvas de intersección son hipérbolas, aunque no logra trazar en la gráfica estas curvas. E4 menciona que la intersección es el área del plano $z = 0$, y la relaciona con "la parte más abierta" del hiperboloide de dos hojas. El estudiante E4 solo puede distinguir la altura a la que se encuentran los planos, pero no ubica sobre ellos la curva de intersección (modo AE-SC Falso), según se advierte en el extracto de la entrevista que a continuación se presenta:

Entrevistador: ¿Y cuál es el plano Z igual cero?

E4: O sea, simplemente no habría nada. Ah, no, pérame. Si... es que no me acuerdo cómo lo hice... Ah, ya, ya perdón. Eh, pues simplemente quedaría en el plano, este, XY, serían estos... ¿cómo se dice? Todos los puntos que pasa en esta intersección ¿sí? (dibuja el plano $z = 0$ en el hiperboloide de la figura 16).

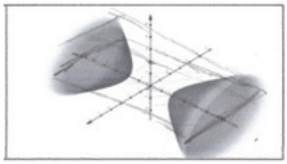


Figura 16. Respuesta de E4 en la A1

Entrevistador: ¿Cómo sería la curva de intersección?

E4: Ahm... ¿Cómo?

Entrevistador: Tú dices que este es el plano $z = 0$, entonces, ¿Cómo se vería la curva que se obtiene al cortar la superficie con ese plano?

E4: ¿Qué figura da?

Entrevistador: Ajá.

E4: Creo que era una parábola.

Entrevistador: Entonces ¿esa es la forma tendría ese conjunto de puntos donde el hiperboloide de dos hojas, intercepta a Z igual a cero y a Z igual a dos?

E4: Ok. Entonces ¿lo dibujo o cómo?

Entrevistador: Sí, puedes dibujarlo.

E4: Es que no te entiendo.

Entrevistador: Tú dices que la curva es un ¿qué?

E4: Es una elipse. Bueno, es... Bueno es, es que como son dos, es una hipérbole.

Entrevistador: ¿Una hipérbole?

E4: Ajá.

Entrevistador: Si así se ve el plano Z igual a cero, ¿cómo se ve aquí la figura que se forma?...

E4: Aquí intercectan los puntos que vienen en esta área.

Entrevistador: Exactamente. Entonces ¿cómo puedes expresar esa intersección de manera gráfica?

E4: Sería todos estos... como un plano, sería así, interceptan esto y todo este es la, la intersección, ajá.

Entrevistador:	Y entonces esa intersección en particular con el hiperboloide de dos hojas ¿cuál es exactamente esa intersección del plano con el hiperboloide de dos hojas?
E4:	¿Cuál es el plano?
Entrevistador:	Ya dibujaste el plano, tienes el hiperboloide de dos hojas ¿cuál es la intersección entre ambos?
E4:	¿La elipse? No, la hipérbole, perdón
Entrevistador:	Ajá
E4:	Dependiendo, sería cuando... Es la parte más abierta de las... ¿cómo se llama? Del hiperboloide de dos hojas. (remarca en la figura los extremos del plano dibujado $z = 0$)
Entrevistador:	Ok.
E4:	Es que me pongo nervioso.
Entrevistador:	No, no te preocupes, está bien, tú tranquilo.
E4:	Y cuando Z vale igual a dos, simplemente sería más chica la, la hipérbola, sería en este caso aquí, entonces interceptarían en todos estos planos, o sea esto es como iría, en todos estos valores. Bueno sería más en la parte más arriba, sería más chica la hipérbole. (dibuja el plano $z = 2$).

Por lo tanto, en el contexto del análisis anterior, se advierte que si se privilegia el modo de pensamiento SG-SC y no se presentan los elementos matemáticos articuladores: *sustitución − ecuación de dos variables − parámetros* en el tránsito hacia el modo AA-SC, entonces el modo de pensar AE-SC no se alcanza y así mismo, si se restringe el modo de pensamiento SG-SC, posiblemente a ciertas formas, entonces el tránsito hacia el modo AA-SC no es posible, como se verifica en el caso del estudiante E4, quien incorpora los articuladores: *sustitución − ecuación de dos variables − valores de variable − simetrías − parámetros* únicamente en caso de haber percibido inicialmente la forma de las curvas de intersección. Por lo tanto, aunque el pensamiento sintético resulta necesario para establecer una aproximación intuitiva a la noción de SC, este no es suficiente para lograr transitar al reconocimiento estructural de las propiedades del concepto de SC.

4.3. Tránsitos desde AA-SC → SG-SC y dificultades para alcanzar el modo AE-SC

La ruta cognitiva AA → SG → AE Insuficiente se presenta cuando el estudiante E1 responde la actividad A5, en la que se solicita transformar la ecuación $2x^2 + y^2 - 2z^2 - 4x + 8z - 8 = 0$ a la forma estándar e identificar la superficie cuadrática correspondiente, además de dibujar su gráfica y describirla mediante algunas de sus trazas. Ante esto, E1 realiza una transformación algebraica a partir de la cual establece la ecuación estándar y anota que la forma de la superficie es un hiperboloide de una hoja (modo SG-SC), junto a la cual E1 anota las coordenadas $(1, 0, 2)$, punto que es centro del hiperboloide y que E1 identifica en los parámetros de la ecuación estándar que plantea en la figura 17.

Transformar ecuación estándar

$2x^2 + y^2 - 2z^2 - 4x + 8z - 8 = 0$

$(2x^2 - 4x) + y^2 - 2z^2 + 8z = 8$

$2(x^2 - 2x) + y^2 - 2(z^2 - 4z) = 8$

$2(x^2 - 2x + 1) + y^2 - 2(\dots$

$\dots 2^2 - 4z + 4) = 8 + 2 \cdot 8$

$2(x-1)^2 + y^2 - 2(z-2)^2 = 2$

$\frac{2(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{2} - \frac{2(z-2)^2}{2} = 1$

$(x-1)^2 + \frac{y^2}{2} - (z-2)^2 = 1$

Ecuación estándar:

$\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{2} - \frac{(z-2)^2}{1} = 1$

Nombre:

Hiperboloide de una hoja

$(1,0,2)$

Figura 17. Respuesta de E1 en la A5

Luego, E1 en la figura 18 propone cuatro diferentes puntos en el espacio y verifica mediante una sustitución que sus coordenadas satisfacen a la ecuación estándar del hiperboloide (puntos que pertenecen al hiperboloide pero que no están graficados y tampoco se explica de qué forma se obtienen). Después E1 considera los valores correspondientes a la coordenada de estos puntos y los sustituye en la ecuación estándar para establecer ecuaciones de dos variables, con las que dibuja algunas trazas del hiperboloide, aunque no representa en la gráfica las cuatro ecuaciones propuestas, sino que ubica dos de ellas y no obtiene la ecuación de una de las trazas que grafica correspondiente al plano $z = 4$ (modo AE-SC Insuficiente).

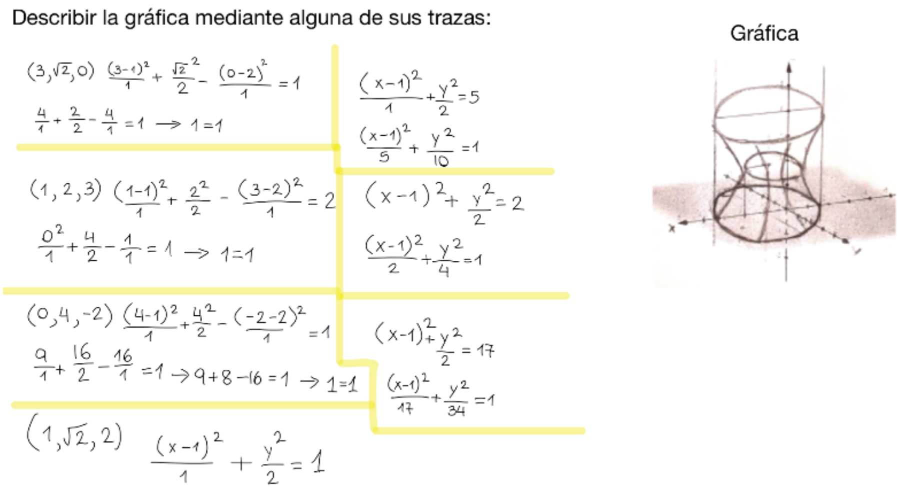


Figura 18. Respuesta de E1 en la A5

En consecuencia, a diferencia de los estudiantes E2 y E4 que presentan restricciones respecto a los modos de pensar SG-SC o AA-SC, el estudiante E1 articula ambos modos de pensamiento, y en particular involucra los elementos matemáticos: *sustitución – ecuación de dos variables – parámetros*, no obstante, en el tránsito hacia el modo de pensar AE-SC se advierte que los argumentos que expone no presentan en todos los casos una correspondencia entre lo sintético y lo analítico, y no se incorpora el elemento articulador variabilidad, lo cual restringe el paso para llegar al modo de pensar AE-SC.

5. CONCLUSIONES

Aunque en general los reportes que anteceden a este trabajo explican la construcción de las funciones de dos variables (Kashefi *et al.*, 2013; Martínez-Planell & Trigueros, 2013, 2019, 2021; Şefik & Dost, 2020; Weber & Thompson, 2014), este estudio se distingue por profundizar en los tránsitos entre los modos de pensar las SC –prerrequisito curricular de dichas funciones– por parte de estudiantes que resuelven situaciones matemáticas propuestas, poniendo de relieve los elementos matemáticos que ellos evocan en su resolución.

Los hallazgos del estudio indicaron que el tránsito entre los modos SG-SC ↔ AA-SC resulta indispensable en los primeros acercamientos en la comprensión del concepto en estudio, y se logra al identificar los elementos matemáticos: transformaciones gráficas/algebraicas, ecuación estándar, parámetros, sustitución, ecuación de dos variables, simetrías y curva de intersección, como se muestra en la figura 19; mientras que la transición a la interpretación estructural del concepto requiere un pensamiento variacional mediante el cual, conjuntos de puntos ubicados en el espacio tridimensional se proyectan en un plano para configurar las trazas que constituyen a las superficies cuadráticas, es decir, la comprensión de estos elementos matemáticos representados en el espacio (modo AE-SC), se favorece cuando intervienen de manera conjunta los elementos articuladores: proyección – plano en el espacio – variabilidad.

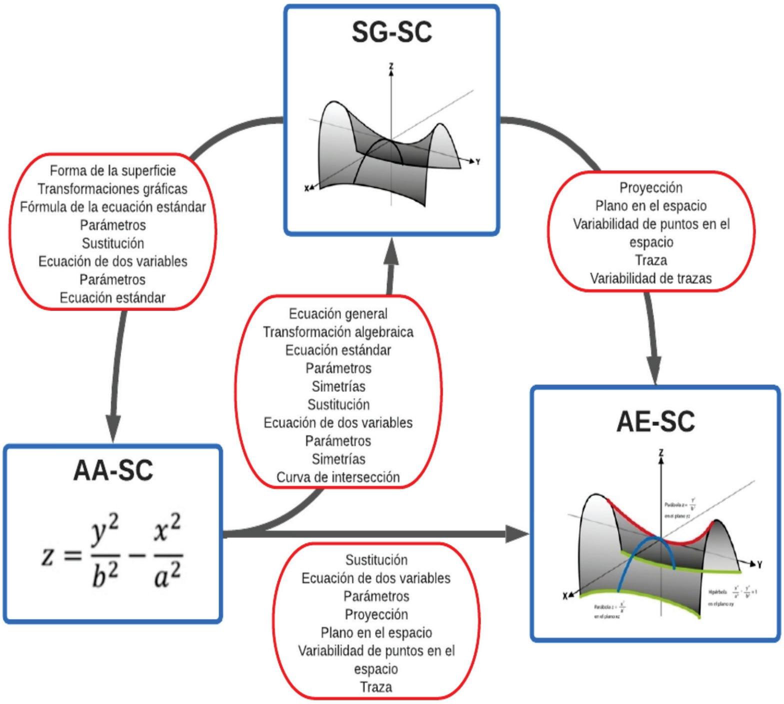


Figura 19. Articuladores entre los Modos de Pensar las SC

De manera específica, la evidencia mostró que la variabilidad es un elemento matemático indispensable para alcanzar el modo AE-SC, para lo cual el *GeoGebra* mostró un rol importante en su reconocimiento. Lo anterior, debido a que la interacción con el entorno gráfico-algebraico del software permitió a los estudiantes percibir la variabilidad relacionada con el concepto, lo cual es difícil comunicar a través de un argumento observable si solo se trabaja con lápiz y papel. Así mismo, en concordancia con los resultados reportados en el trabajo de López-Vega (2018), el uso del *GeoGebra* favoreció el tránsito entre los modos SG-SC y AA-SC, para relacionar la ecuación de las superficies con las orientaciones de sus gráficas (transformaciones gráficas – fórmula de la ecuación estándar) y para reconocer cómo afectan los parámetros de la ecuación a la superficie (ecuación estándar – parámetros – simetrías).

Por otra parte, los estudiantes que privilegiaron exclusivamente alguno de los modos de pensamiento SG-SC o AA-SC, no llegaron al modo de pensar AE-SC.

Por ejemplo, de manera análoga a los resultados reportados por Trigueros y Martínez-Planell (2010), los datos de esta investigación mostraron que una tendencia al modo SG-SC produce un obstáculo para poder articular los modos SG-SC y AA-SC, debido a que si se enfoca la atención exclusivamente en las formas y simetrías de las superficies cuadráticas y de las curvas de intersección, solo es posible realizar una aproximación intuitiva a la noción; por lo que se debe de prever que los estudiantes que privilegian este modo podrían limitarse a un reconocimiento visual y no estructural del concepto de superficies cuadráticas.

Aunque también, los resultados mostraron que el modo de pensar SG-SC resulta imprescindible en la comprensión de las superficies cuadráticas; y es que si se restringe este modo, posiblemente a ciertas formas, entonces el tránsito hacia el modo AE-SC tampoco se alcanza, debido a que no se perciben las formas gráficas. Como consecuencia de esto último, no es posible incorporar los elementos matemáticos: sustitución – ecuación de dos variables – parámetros, necesarios para articular al modo AA-SC en el proceso de comprensión del concepto. Al respecto, se sugiere que en las actividades didácticas, creadas para explorar en el *GeoGebra* las características de las superficies cuadráticas, se incluya el análisis de trazas de diferentes curvas cónicas y no solo con formas elípticas.

Desde un punto de vista metodológico y práctico, la descripción de la comprensión de las SC por parte de estudiantes universitarios, a través de la relación entre elementos matemáticos articuladores de diferentes formas de ver el concepto, ofrece una referencia útil para los profesores de matemáticas con el fin de aclarar el diseño y orientación de los esfuerzos de enseñanza y evaluación del tema.

Futuras investigaciones podrían focalizarse en confirmar los hallazgos que surgen en este trabajo, a través de un estudio de corte cuantitativo en el que los resultados que aquí se presentan se utilicen como hipótesis para contrastar un grupo control con instrucción tradicional y uno experimental, que sea expuesto a una experiencia de aprendizaje que involucre la exploración de los elementos matemáticos articuladores de los modos de pensar las SC antes descritos.

REFERENCIAS

Boyer, C. (1968). *A history of mathematics*. Wiley International.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill.

Kashefi, H., Ismail, Z., & Yusof, Y. (2013). Learning Functions of Two Variables Based on Mathematical Thinking Approach. *Jurnal Teknologi*, *63*(2), 59-69. https://doi.org/10.11113/jt.v63.2010

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza.

Kvale, S. (2011). *Las entrevistas en investigación cualitativa*. Ediciones Morata.

Larson, R., & Edwards, B. (2016). *Cálculo. Tomo II.* Cengage Learning.

López-Vega, P. (2018). *Génesis instrumental del hiperboloide en estudiantes de arquitectura mediada con el GeoGebra*. [Tesis para optar el título de Magíster, Pontificia Universidad Católica del Perú]. https://bit.ly/3CvLBot

Lowell, J. (1968). *A history of the conics sections and quadric surfaces*. Dover publications, Inc.

Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2013). Graphs of functions of two variables: results from the design of instruction. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(5), 663-672. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.780214

Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2019). Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables. *Journal of Mathematical Behavior, 55*, 1-22. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.003

Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2021). Multivariable calculus results in different countries. *ZDM – Mathematics Education, 53*, 695-707. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01233-6

Parraguez, M. (2012). *Teoría de los modos de pensamiento*. Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Şefik, Ö., & Dost, Ş. (2020). The analysis of the understanding of the three-dimensional (Euclidian) space and the two-variable function concept by university students. *The Journal of Mathematical Behavior, 57*, 1-19. https://doi.org/10.1016/J.JMATHB.2019.03.004

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students´ Thinking in Linear Algebra. En: J.L. Dorier (ed) *On the Teaching of Linear Algebra, 23*, 209-246. Springer https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8

Thomas, G. (2015). *Cálculo varias variables. Treceava edición*, Pearson Education.

Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2007). Visualization and abstraction: Geometric representation of functions of two variables. En T. Lamberg &L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 100-107.

Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics, 73*, 3-19. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5

Weber, E., & Thompson, P. (2014). Students' images of two-variable functions and their graphs. *Educational Studies in Mathematics, 87*(1), 67-85. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9548-0

Weiss, E. (2017). Hermenéutica y descripción densa versus teoría fundamentada, *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *22*(73), 637-654. https://www.redalyc.org/pdf/140/14050493013.pdf

Autor de correspondencia

GUADALUPE VERA-SORIA

Dirección postal: Marcelino García Barragán #1421, colonia Olímpica,
C.P. 44430, Guadalajara, Jalisco, México.
Edificio V, tercer nivel Cubículo 6
guadalupe.vera@academicos.udg.mx

Teléfono: +52 (33) 1378 5900 ext. 27753

 https://doi.org/10.24844/EM3603.08

Significados personales sobre la demostración matemática de estudiantes al inicio de la educación superior

Students' personal meanings of mathematical proof at the start of higher education

Bettina Milanesio,[1] María Burgos[2]

Resumen. Cómo enseñar la demostración y cómo se produce su aprendizaje continúa siendo un reto tanto para los investigadores en educación matemática como para los propios profesores. Aunque las prácticas demostrativas están presentes en las clases de matemáticas en la etapa de secundaria, los estudiantes que acceden a titulaciones universitarias siguen mostrando grandes dificultades para desarrollar demostraciones con el grado de formalidad que se espera de la formación superior. El objetivo de este trabajo es analizar los significados personales sobre la demostración de estudiantes que acceden a los grados de física y matemáticas en una universidad argentina. Aplicamos el modelo de Toulmin y las herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Onto-semiótico para caracterizar qué dificultades se encuentran, qué tipos de demostraciones desarrollan y cuáles son los niveles de formalización logrados. Los resultados de sus producciones muestran, por un lado, el predominio de argumentaciones no deductivas y la escasa presencia de demostraciones formales; por otro el avance en la comprensión y desarrollo de demostraciones de un mayor nivel de formalización, con la puesta en común y la discusión grupal.

Fecha de recepción: 25 de octubre de 2023. **Fecha de aceptación:** 5 de agosto de 2024.

[1] Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, bettinamilanesio@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2489-0004.

[2] Universidad de Granada,. mariaburgos@ugr.es, https://orcid.org/0000-0002-4598-7684.

Palabras clave: *educación superior, demostración matemática, niveles de algebrización, modelo de Toulmin, Enfoque ontosemiótico.*

Abstract. Teaching proof and how its learning occurs continues to be a challenge for both mathematics education researchers and teachers themselves. Although demonstrative practices are present in high school mathematics classes, students entering university degree programs still show significant difficulties in developing proofs to the level of formality expected in higher education. The objective of this work is to characterize the personal meanings of proof for students entering physics and mathematics programs at an Argentine university. We apply the Toulmin model and the theoretical-methodological tools of the Ontosemiotic Approach to analyze the difficulties encountered, the types of proofs developed, and the levels of formalization achieved. The results of their productions show, on the one hand, the predominance of non-deductive arguments and the limited presence of formal proofs; on the other hand, progress in the understanding and development of proofs of a higher level of formalization through group sharing and discussion.

Keywords: *higher education, mathematical proof, algebrization levels, Toulmin model, ontosemiotic approach.*

1. INTRODUCCIÓN

Demostrar es una parte indispensable del quehacer matemático, por lo que un objetivo fundamental de la enseñanza de las matemáticas debe ser que los estudiantes produzcan, comprendan y aprecien las demostraciones participando en prácticas demostrativas a lo largo de su educación (Stylianides y Stylianides, 2017; Weber *et al.*, 2020).

Si bien en la comunidad de matemáticos se comparte el significado de demostración matemática, entendida de un modo riguroso y absoluto (Godino y Recio, 2001), esto no ocurre entre los educadores matemáticos (Stylianides *et al.*, 2016), para los que la definición de demostración debe tener en cuenta el contexto en el que se utiliza, el grado de formalidad con el que se emplea y las restricciones de la propia disciplina (Stylianides *et al.*, 2022). Esto lleva a reconocer la importancia de otras formas de aproximarse a la demostración con distintos grados de formalidad y estructuras diferentes tales como justificación, validación, explicación, prueba y especialmente, la argumentación (Alfaro-Carvajal *et al.*, 2019; Balacheff, 2000; Godino y Recio, 2001; Pedemonte y Balacheff, 2016; Stylianides *et al.*, 2016; Stylianides *et al.*, 2017).

El papel de la demostración en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la complejidad intrínseca a este mega-proceso, hace imprescindible que el profesor de matemáticas sea consciente sobre qué entienden los estudiantes por demostrar en matemáticas y qué dificultades encuentran en esta tarea. De esta forma podrán encontrar elementos de convergencia para apoyar el compromiso de los estudiantes con la práctica demostrativa (Alfaro-Carvajal *et al.*, 2019; Stylianides y Stylianides, 2022). Puesto que, en contextos escolares, la noción de demostración se abre a argumentaciones deductivas informales y a argumentaciones no deductivas (Godino y Recio, 2001), diversos autores se han preocupado por caracterizar las diferentes maneras de argumentar que se manifiestan en el aula (Alfaro-Carvajal *et al.*, 2019; Arce y Conejo, 2019; Cañadas, 2007; Inglis y Mejia-Ramos, 2005; Inglis *et al.*, 2007; Juthe, 2005; Molina y Samper, 2019; Molina *et al.*, 2019; Soler-Álvarez y Manrique, 2014). En su mayoría, estos trabajos adoptan el modelo de Toulmin (2003) para categorizar las argumentaciones propuestas por estudiantes ante diferentes tipos de tareas, observando predominio de argumentaciones inductivas, abductivas, analógicas o plausibles, que, si bien no son las pretendidas institucionalmente para validar de manera general el conocimiento matemático, son fundamentales en los procesos de experimentación y elaboración de conjeturas.

Las investigaciones que analizan las dificultades de los estudiantes en los procesos de comprensión y desarrollo de demostraciones insisten en que muchas de estas limitaciones vienen motivadas por las diferencias existentes entre las demostraciones desarrolladas a nivel escolar y las desarrolladas en el nivel universitario (Chacón, 2009; Lew y Mejía-Ramos, 2019; Nagel *et al.*, 2018, Rocha, 2019; Stylianides y Stylianides, 2017; Stylianides *et al.*, 2017).

Para Stylianides y Stylianides (2017) aceptar en un nivel educativo una forma argumentativa que se va a rechazar después en un nivel superior, supone un obstáculo para el alumnado, al que se le exige que rompa con ideas previas sobre lo que es una demostración matemática. La distancia estructural entre las argumentaciones informales y la argumentación deductiva que rige una demostración formal motiva que estudiantes de nivel universitario carezcan de las competencias necesarias para elaborar demostraciones con éxito, bien porque no dan sentido a enunciados con una estructura lógica compleja o no logran identificar argumentos inválidos (Stylianides *et al.*, 2017). Nagel *et al.* (2018) reconocen que la ausencia de demostraciones formales en el nivel secundario obliga a los estudiantes a superar diversas barreras para sobrellevar con éxito las demostraciones en la entrada al nivel universitario. Así, se les exige de manera prematura desarrollar habilidades avanzadas de razonamiento matemático para desenvolverse en las prácticas demostrativas, cuando están empezando a aprender la estructura de la demostración (Nagel *et al.*, 2018). Al comienzo de la etapa universitaria, los estudiantes no están familiarizados con el lenguaje formal (Rocha, 2019) ni con las convenciones de la escritura de las demostraciones matemáticas (Lew y Mejía-Ramos, 2019). Finalmente, presentar de manera extrema las matemáticas como producto axiomático-deductivo, motiva que estudiantes puedan desanimarse al verse empujados a un nivel con excesiva formalidad (Chacón, 2009).

Aunque estas investigaciones dan cuenta de la complejidad que entraña el estudio de la demostración matemática en diferentes etapas educativas, no han abordado, sin embargo, el origen de las dificultades que encuentran los estudiantes o los tipos de demostraciones que logran desarrollar a partir del análisis de los significados pragmáticos, es decir, en términos de los objetos y procesos que intervienen en las prácticas demostrativas y su grado de generalidad. Un primer avance se ha llevado a cabo en trabajos que toman el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino *et al.*, 2019) como marco de referencia para analizar la actividad matemática implicada en la demostración (Godino y Recio, 2001; Markiewicz *et al.*, 2021; Molina *et al.*, 2019; Recio y Godino, 2001). En particular, en Markiewicz *et al.* (2021) se analizan los objetos y procesos que emergen en las prácticas argumentativas logradas por estudiantes del último año de la escuela secundaria. Las autoras determinan los niveles de algebrización (Godino *et al.*, 2015) donde se sitúan dichas prácticas y los conflictos semióticos que obstaculizan el avance hacia la argumentación deductiva pretendida en la universidad. Esta investigación permite constatar ciertas distancias entre las pruebas logradas por estudiantes del último año de la escuela secundaria y las pretendidas en el nivel superior, dando cuenta de la necesidad de revisar las prácticas que se desarrollan en cada ámbito, con el fin de avanzar en una mayor articulación entre ambos niveles educativos.

El análisis de las prácticas, objetos y procesos y del nivel de generalidad se ha mostrado como una herramienta potente para caracterizar conocimientos institucionales o personales y analizar dificultades en distintos contenidos matemáticos y etapas educativas (Burgos y Godino, 2020; Gaita *et al.*, 2023; Godino *et al.*, 2014; entre otros). En línea con estos trabajos, nos proponemos caracterizar los significados personales sobre la demostración en estudiantes al inicio de la educación superior, a partir del análisis de sus prácticas matemáticas. Para cumplir este objetivo abordamos las siguientes cuestiones de investigación:

- ¿Qué estrategias argumentativas ponen de manifiesto los estudiantes en el ingreso al nivel superior?
- ¿Cuáles son los niveles de razonamiento algebraico identificados en sus prácticas matemáticas?
- ¿Cuáles son las dificultades que ponen en evidencia ante una situación que requiera justificar o demostrar?

En las prácticas demostrativas se pueden identificar diferentes niveles de razonamiento algebraico (Godino *et al.*, 2014), es decir, diferentes grados de generalidad de los objetos implicados, de los lenguajes usados y del cálculo analítico que se realiza con dichos objetos. Esto permite una categorización más profunda de los significados personales puestos en juego y facilita una nueva mirada a las dificultades encontradas por los estudiantes.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En esta sección se describen los elementos esenciales del EOS como marco teórico utilizado en el diseño, implementación y evaluación de la investigación, así como los diferentes tipos de argumentación con base en el modelo de Toulmin.

2.1. EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS

El EOS entiende las matemáticas como una actividad de las personas implicadas en la solución de cierta clase de situaciones e interpreta el significado pragmático de los objetos matemáticos en términos de los sistemas de prácticas operativas y discursivas que se ponen en juego en la solución de dichas situaciones (Godino *et al.*, 2019) por una persona (significado personal) o institución (significado institucional). El aprendizaje tiene como finalidad la apropiación por los estudiantes de los significados institucionales que le permitan afrontar la solución de determinados problemas y desarrollarse como persona.

Las dificultades y limitaciones de aprendizaje se interpretan en el EOS como disparidades o desajustes entre el significado manifestado por un sujeto y el significado institucional de referencia.

Significado pragmático

Se considera *práctica matemática* a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos. En estas prácticas intervienen *objetos matemáticos* entendidos como entidades que pueden ser separadas o individualizadas según su naturaleza y función. Pero, además de por su "estructura" (los objetos), la actividad matemática queda caracterizada por su "funcionamiento" (cómo interactúan los objetos), lo que lleva a hablar de *procesos matemáticos* concediéndole una perspectiva dinámica (Font *et al*., 2010). Así, los diferentes tipos de objetos matemáticos primarios: lenguajes, conceptos, proposiciones, argumentos, procedimientos y situaciones-problemas, emergen por medio de los respectivos procesos de comunicación, definición, enunciación, argumentación, algoritmización y problematización.

Por otro lado, estos objetos primarios pueden ser considerados desde cinco dimensiones duales, lo que lleva a la siguiente tipología de objetos secundarios: ostensivos (públicos) - no ostensivos (ideales); extensivos (particulares) - intensivos (generales); significantes (expresión) - significados (contenido) (antecedentes o consecuentes de una función semiótica); unitarios (considerados como un todo previamente conocido) - sistémicos (sistemas formados por distintos componentes); personales (sujetos individuales) - institucionales (compartidos en una institución). Tanto los objetos primarios como los secundarios se pueden considerar desde la perspectiva proceso-producto, lo que permite distinguir tipos de procesos matemáticos primarios (aquellos de los que emergen los objetos primarios) y secundarios (de los que emergen los objetos secundarios).

El reconocimiento explícito de tales objetos y procesos permite anticipar conflictos semióticos potenciales o efectivos entendidos como cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa (Godino *et al*., 2007).

Modelo de razonamiento algebraico elemental

El modelo de los niveles de razonamiento algebraico elemental (RAE) desarrollado en el EOS (Godino *et al.*, 2014; Godino *et al.*, 2015) describe la actividad matemática en términos del grado de generalidad y formalización de los objetos y procesos matemáticos implicados, facilitando un análisis microscópico de las prácticas y, por tanto, de los significados, institucionales o personales (Godino y Burgos, 2017) que se ponen en juego en el estudio de la demostración.

Los criterios para delimitar los niveles están basados en los objetos (relaciones binarias, operaciones y sus propiedades, funciones y estructuras) y representaciones usadas, el grado de generalidad o intensión y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática. Además, el reconocimiento de la naturaleza algebraica en las prácticas matemáticas viene ligado a la identificación de los procesos de generalización, unitarización, representación y cálculo analítico. Mientras que, a través de un proceso de generalización se obtiene un objeto intensivo (regla que genera la clase), como resultado de un proceso de particularización se obtiene un objeto extensivo (particular). Una colección finita simplemente enumerada no se considera como un intensivo hasta el momento en que el sujeto muestra el criterio que se aplica para delimitar los elementos constituyentes del conjunto. En este momento el conjunto pasa a ser una entidad unitaria emergente del sistema, es decir, además de la generalización ocurre un proceso de unitarización. Esta nueva entidad unitaria debe ser materializada para que pueda participar de otras prácticas, procesos y cálculos mediante procesos de representación y transformación (Godino *et al.*, 2014). En concreto, los niveles de RAE son:

- Nivel 0 (N0). Se distingue por la ausencia de algebrización; se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad usando lenguajes natural, numérico, icónico o gestual.
- Nivel 1 (N1). Involucra objetos intensivos de segundo grado de generalidad (clases de intensivos de grado uno), propiedades de la estructura algebraica de $\mathbb{N}$ y la igualdad como equivalencia. La generalidad se reconoce de manera explícita mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con estos.
- Nivel 2 (N2). Se usan representaciones simbólico-literales para referir a objetos intensivos reconocidos ligados a la información y contextual; en

tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.
- Nivel 3 (N3). Los símbolos se emplean de forma analítica. Se realizan operaciones con indeterminadas o variables y se formulan de manera simbólica y descontextualizada reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.
- Nivel 4 (N4). Primer encuentro con parámetros y coeficientes variables que implica la función paramétrica, esto es, la función que asigna a cada valor del parámetro una función o ecuación específica. Se opera con coeficientes variables, pero no con parámetros.
- Nivel 5 (N5). Tratamiento de parámetros. Se realizan cálculos analíticos en los que intervienen uno o más parámetros, junto con otras variables.
- Nivel 6 (N6). Introducción de algunas estructuras algebraicas (como la de espacio vectorial o grupo) y el estudio del álgebra de funciones.

Reconocer diferentes grados de generalidad y formalización en las prácticas que implican demostración permite definir significados parciales y establecer relaciones jerárquicas entre ellos en función de su complejidad e interdependencia.

Configuración didáctica y hecho didáctico significativo

En el EOS se introduce la noción de *configuración didáctica* como cualquier segmento de actividad didáctica comprendido entre el inicio y la finalización de la resolución de una tarea determinada. Contempla las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar el estudio conjunto de la tarea a propósito de los objetos y procesos matemáticos que involucra (Godino *et al*., 2020).

En el transcurso de una configuración didáctica, pueden ocurrir hechos didácticos que interesa analizar, entendidos como cualquier acontecimiento que tiene un lugar y un tiempo en los procesos de instrucción matemática y que se considera una unidad. En particular, se considera un *hecho didáctico significativo* (HDS) cuando las acciones o prácticas didácticas que lo componen desempeñan una función o admiten una interpretación con relación al objeto instruccional pretendido. La significatividad se puede entender desde la perspectiva del docente, del alumno, o bien desde un punto de vista externo al sistema didáctico, constituido por el sujeto que ha realizado el estudio preliminar y el diseño instruccional.

2.2. Demostración, argumentación y el modelo de Toulmin

Se proporcionan las definiciones adoptadas en este trabajo de argumentación y demostración y se decribe el modelo de Toulmin para el análisis de la actividad argumentativa.

Consideramos la argumentación como "un proceso colectivo o individual que, de acuerdo con reglas compartidas, apunta a una conclusión mutuamente aceptable acerca de la veracidad o falsedad de una aserción" (Molina *et al.*, 2019, p. 95). A partir de un proceso de argumentación se desarrollan acciones propias del quehacer matemático, tales como, inducir, proponer analogías, abducir propiedades de hechos empíricos para la formulación de conjeturas, proveer pruebas deductivas de hechos previamente conjeturados y comunicar los resultados obtenidos (Molina y Samper, 2019).

En relación con la demostración, desde el punto de vista de la educación matemática, es fundamental adoptar una postura sobre la demostración que, además de respetar la integridad matemática, la concepción de demostración considere el papel de la comunidad del aula, pues las demostraciones deben tener sentido para los estudiantes en el contexto educativo en el que se insertan (Larios-Osorio *et al.*, 2018; Stylianides *et al.*, 2017). Así, consideramos la demostración como un tipo de argumentación en matemáticas que tiene las siguientes características (Stylianides *et al.*, 2017):

a) Utiliza un conjunto de aserciones aceptadas como verdaderas y que están disponibles para la comunidad de aula sin más justificación.
b) Se usan modos de argumentación válidos y conocidos por la comunidad o que están dentro de su alcance conceptual.
c) Se comunica con formas de expresión apropiadas, conocidas o dentro del alcance conceptual de la comunidad de aula.

Así, una demostración es una argumentación en matemáticas, pero no toda argumentación es una demostración. Además, Stylianides *et al.* (2017) distinguen entre la demostración entendida como producto, es decir, una secuencia conectada de afirmaciones, y como proceso que implica acciones en la búsqueda de una conclusión a favor o en contra de una afirmación matemática. En estas acciones pueden estar implicadas actividades precursoras de la demostración, tales como, conjeturar mediante el uso de ejemplos, analogías, inducción, abducción, entre otros, esenciales para el aprendizaje de los escolares (Larios-Osorio *et al.*, 2018; Marmolejo y Moreno, 2021; Stylianides *et al.*, 2022).

Como hemos mencionado, diferentes autores han tomado el modelo de Toulmin (2003) para caracterizar las argumentaciones que se manifiestan en las clases de matemáticas, documentar las dificultades que encuentran los estudiantes con la demostración y analizar cómo progresa el aprendizaje (Arce y Conejo, 2019; Molina y Samper, 2019; Molina *et al.*, 2019; entre otros). Tanto Arce y Conejo (2019) como Soler-Álvarez y Manrique (2014) emplean la idea de razonamiento de Peirce, quien lo entiende como un proceso mediante el cual se llega a una conclusión a partir de unas premisas, y conduce a un conocimiento verdadero para quien razona. Teniendo en cuenta esa concepción, Soler-Álvarez y Manrique (2014) afirman que un razonamiento para Peirce se puede considerar un tipo de argumento según Toulmin (2003). Por otro lado, desde la perspectiva pragmática del EOS se entiende el razonamiento como un sistema de acciones (prácticas operativas y discursivas) que involucran un proceso de argumentación.

> Desde un punto de vista cognitivo, las relaciones entre razonamiento y argumentación son las que se establecen entre un constructo y sus indicadores empíricos. [El razonamiento] como actividad intelectual que no puede reducirse meramente a la manipulación de informaciones, da origen a las prácticas argumentativas, personales o institucionales, que constituyen su dimensión ostensiva y comunicacional. Al mismo tiempo, el razonamiento se desarrolla por medio de dichas prácticas, de modo que el estudio del razonamiento está constitutivamente ligado al estudio de la argumentación. (Godino y Recio, 2001, p. 406)

Toulmin (2003) estudió el funcionamiento de los argumentos a fin de comprobar cómo se relaciona su validez con su estructura, teniendo en cuenta la forma lógica involucrada en cada argumento. Siguiendo a este autor, entendemos por argumento un discurso oral o escrito producto de un proceso de argumentación compuesto por tres elementos básicos: *conclusión* (se manifiesta una afirmación u opinión cuyo valor se está tratando de establecer), *datos* (permiten apoyar la afirmación realizada, la conclusión) y *garantía* (posibilita que el paso de los datos a la conclusión sea legítimo, ya que, permite conectarlos mediante una justificación a partir de inferencias basadas en reglas generales, principios, enunciados). Toulmin también considera tres elementos auxiliares que permiten describir un argumento: *respaldo* (otras certezas que soportan la garantía), *calificativo modal* (grado de fuerza o de probabilidad conferida por la garantía que acompaña a la conclusión) y *refutaciones* (condiciones de excepción en las que la garantía se podría anular) (figura 1).

El objetivo de Toulmin fue proporcionar un modelo que sirviera para analizar argumentos en general y no solo deductivos (Pedemonte y Reid, 2011), por lo que será de especial utilidad en este trabajo.

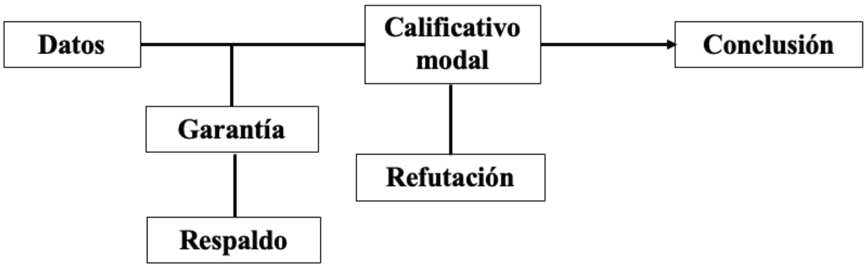


Figura 1. Esquema argumentativo según Toulmin (2003, p. 141).

A continuación, caracterizaremos con base en el modelo de Toulmin las argumentaciones más relevantes para este trabajo: abductiva, inductiva, deductiva, analógica y plausible.

En el argumento que surge en una *argumentación abductiva*, un hecho observado (conjetura) actúa como conclusión, y se propone una posible explicación que lo justifique a partir de posibles datos, una garantía y un respaldo (Arce y Conejo, 2019). La garantía actúa como una regla hipotética que proviene de una exploración empírica o de una regla aceptada dentro de una exploración teórica (Molina y Samper, 2019). Está respaldada por un enunciado o una teoría matemática de la cual podría derivarse la garantía.

La *argumentación inductiva* parte de la evidencia empírica sobre casos particulares para concluir una afirmación matemática general, por lo que, el proceso de generalización desempeña un papel fundamental. Siguiendo el modelo de Toulmin (2003), en el argumento que surge, los datos corresponden a verificaciones en casos particulares de la conclusión y la garantía está respaldada por la verificación de la conclusión en esos casos concretos, aunque es insuficiente para inferir la validez de la conclusión. Por esto, se deriva de forma plausible y provisional un enunciado general (conclusión) (Arce y Conejo, 2019; Molina *et al.*, 2019).

La *argumentación deductiva* se produce generalmente en los procesos de demostración de conjeturas, siendo la única que permite validar conocimiento en matemáticas, irrefutable a excepción de que existan cambios en el sistema axiomático de partida. En el argumento emergente de esta argumentación se aplica una proposición general conocida (garantía) a unos datos dados para obtener la conclusión. A su vez, la garantía está respaldada por una teoría matemática que hace que la misma sea válida. (Arce y Conejo, 2019; Molina *et al.*, 2019).

Soler-Álvarez y Manrique (2014) e Inglis *et al.* (2007) consideran el uso de contraejemplos como argumentaciones deductivas. Soler-Álvarez y Manrique (2014) los caracterizan a partir del modelo de Toulmin (2003), tomando como dato al caso no válido $\exists y: (P(y) \wedge \neg Q(y))$, como garantía la regla general $\forall x: (P(x) \rightarrow Q(x))$, como respaldo la equivalencia lógica $\forall x: (P(x) \rightarrow Q(x)) \leftrightarrow \neg\exists y: (P(y) \wedge \neg Q(y))$ y como conclusión, el no cumplimiento de la regla general.

En el argumento analógico producto de una *argumentación analógica* se obtiene una conclusión a partir de premisas en las que se establece una analogía o comparación entre elementos o conjuntos de elementos distintos (Cañadas, 2007). Para Juthe (2005) un buen argumento por analogía es aquel en el que: el contenido de los datos y la conclusión están adecuadamente relacionados; los datos son verdaderos, probables o fiables; la prueba adecuada de la conclusión es una analogía correcta enunciada en uno o varios datos.

En estas argumentaciones, la garantía corresponde a la relación entre un hecho conocido y el caso que se está estudiando (Soler-Álvarez y Manrique, 2014). El respaldo hace referencia a la analogía entre los dominios donde se desarrolla la argumentación, aunque no proporciona ciertamente un respaldo para las garantías pues no las justifica (Marraud, 2007). Se infiere de manera plausible la conclusión (conjetura).

Las *argumentaciones plausibles* son definidas por Polya (1954) como aquellas que permiten observar, relacionar, buscar regularidades, elaborar conjeturas que parecen acertadas, examinar su validez, contrastarlas y reformularlas para obtener nuevas hipótesis susceptibles de ser puestas a prueba. Como asegura este autor, una buena parte de nuestra confianza en las demostraciones puede proceder de estos argumentos. Si bien pretenden guiar hacia lo que probablemente es verdad –sin que necesariamente se haya terminado o sea cierto– no permiten probar la validez del conocimiento matemático en cuestión (Cañadas, 2007).

De acuerdo con Inglis y Mejía-Ramos (2005), entenderemos al argumento que da lugar una argumentación plausible como aquel en el que, a partir de considerar la evidencia, la garantía, el respaldo y la conclusión se intenta decidir por uno mismo el calificativo modal (específica la fuerza de la aserción, expresando el grado de confianza en la tesis) con el cual uno completaría el argumento.

En la práctica escolar, el modelo de Toulmin (2003) usado por autores como Soler-Álvarez y Manrique (2014) o Arce y Conejo (2019) permite esclarecer las partes en las que se puede descomponer una práctica argumentativa, poniendo al descubierto las relaciones lógicas y, por ende, la estructura (Soler-Álvarez y Manrique, 2014). Una vez reconocida la estructura de dicha práctica (el tipo de estrategia argumentativa), el análisis de los niveles de algebrización, permite tomar conciencia de la naturaleza de los objetos y procesos emergentes.

3. METODOLOGÍA

Se trata de una investigación descriptiva de enfoque mixto: cualitativa, pues permite describir e interpretar las competencias y dificultades de estudiantes con la demostración matemática y cuantitativa, pues facilita el tratamiento de los datos a través de la categorización, medición y descripción de las características y los perfiles del grupo de participantes. Empleamos el análisis de contenido (Cohen *et al.*, 2011) de los informes de los estudiantes, apoyado en las categorías del EOS (prácticas, objetos y procesos, niveles de RAE, conflictos semióticos). La primera autora de este trabajo realizó el análisis a priori de la tarea de evaluación (resolución, descripción de las prácticas, objetos, procesos, niveles de RAE e identificación de potenciales conflictos), que fue después revisado y completado (cuando fue necesario) por la segunda autora. A continuación, ambas realizaron de manera independiente el análisis descriptivo de los informes de los estudiantes y finalmente de manera conjunta discutieron sus discrepancias, acordando las categorías resultantes del análisis, en un proceso cíclico e inductivo, característico de la investigación cualitativa. De igual forma, las investigadoras consensuaron los criterios de pertinencia de las respuestas de los estudiantes.

3.1. CONTEXTO Y PARTICIPANTES

Los participantes del estudio fueron un grupo de 31 estudiantes de ingreso en el primer curso universitario de las carreras de grado Profesorado y Licenciatura en Matemáticas y Licenciatura en Física en la Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina) en el año 2023. El nivel de desempeño en matemáticas de estos estudiantes era estándar según los resultados de los cursos de nivel secundario.

La implementación se llevó a cabo durante la primera clase de las actividades del ingreso en la asignatura Matemática Discreta que comparten estos estudiantes (actividades desarrolladas a lo largo de un mes para iniciar al alumnado en los contenidos de la asignatura), por lo que no hubo un proceso formativo previo (los conocimientos disponibles de los estudiantes fueron los estudiados en educación secundaria). La docente a cargo de la asignatura proporcionó el problema a los estudiantes para que lo resolvieran de forma individual. Cuando los estudiantes manifestaron haberlo finalizado, se llevó a cabo la puesta en común de la solución a los tres primeros ítems, con la intención de discutir las estrategias argumentativas empleadas y su adecuación para validar de manera general el conocimiento implicado.

3.2. Instrumento de recogida de datos y análisis a priori

En este trabajo mostramos el análisis de los resultados obtenidos en uno de los problemas propuestos (figura 2) que involucra la demostración de diversas propiedades matemáticas, en un contexto aritmético-algebraico cercano a los conocimientos esperados de los estudiantes. Escogimos este problema teniendo en cuenta, por un lado, los contenidos expuestos en las directrices curriculares de los últimos cursos de educación secundaria, considerando que los estudiantes acababan de ingresar al nivel universitario. Por otro lado, acordamos con la profesora que impartía la asignatura Matemática Discreta el contexto matemático del problema, teniendo en cuenta los contenidos que se abordarían en la misma.

En cada caso, justifica tu respuesta.

a) Si se suman tres números naturales consecutivos cualesquiera, ¿el resultado es siempre un múltiplo de 3?

b) Si se suman cinco números naturales consecutivos cualesquiera, ¿el resultado es siempre múltiplo de 5?

c) ¿Cuándo será cierto que, si se suman k números naturales consecutivos cualesquiera, el resultado es múltiplo de k?

d) El resultado de la suma de cinco números naturales que tienen distinto resto al dividirlos por cinco, ¿es un múltiplo de cinco?

Figura 2. Problema propuesto. Fuente: ítems a y b tomados de Sessa (2005, p. 113), ítem c adaptado de Sessa (2005, p. 113), ítem d adaptado de Quercia *et al.* (2014, p.752)

La tarea perseguía la puesta en juego de diversos objetos matemáticos (números naturales consecutivos, múltiplos, números impares, propiedades de la suma y multiplicación en $\mathbb{N}$, propiedades de la división entre naturales y del resto de la división) y de procesos como la exploración de diferentes ejemplos, la búsqueda de contraejemplos, el planteamiento de conjeturas y la propuesta de alguna demostración que permita validar dichas conjeturas. En el caso del ítem c), si bien no se esperaba una excesiva formalidad en la demostración de la doble generalización involucrada distinguida en Sessa (2005) (comienzo de la suma por cualquier número natural y cualquier cantidad de sumandos implicados), si era previsible que desarrollen algún tipo de argumentación menos sofisticada. A continuación, se presentan las soluciones expertas a los diferentes apartados del problema, identificando potenciales conflictos semióticos por parte de los estudiantes.

En la tabla 1 se incluye la configuración ontosemiótica de la solución al primer apartado, como ejemplo del tipo de análisis realizado de las prácticas esperadas. Por limitaciones de espacio, en las siguientes consignas solo se incluyen las prácticas matemáticas que conducen a la solución experta.

Tabla 1. Configuración ontosemiótica apartado a)

<table>
<tr><th colspan="3">Secuencia de prácticas, objetos y procesos</th></tr>
<tr><td colspan="3">Práctica elemental 1. La suma de tres naturales consecutivos se puede representar por $m + (m + 1) + (m + 2)$, con $m \in \mathbb{N}$, fijo pero arbitrario.</td></tr>
<tr><td>Intencionalidad</td><td>Objetos</td><td>Procesos</td></tr>
<tr><td>Atribuir significado a la suma de tres naturales consecutivos cualesquiera como $m + (m + 1) + (m + 2)$, con $m \in \mathbb{N}$, identificando la generalidad del natural m.</td><td>Conceptos: números naturales, suma, números naturales consecutivos.
Lenguajes: natural, simbólico.
Procedimientos: representar la suma de tres naturales consecutivos en lenguaje simbólico.
Propiedad disponible:
$(m + 2) = (m + 1) + 1$ es el consecutivo de $m + 1$.</td><td>Representación: la expresión “suma de tres naturales consecutivos cualesquiera” se traduce de manera simbólica como $m + (m + 1) + (m + 2)$, con $m \in \mathbb{N}$. Se representa con m a un natural fijo pero arbitrario.
Generalización: tomar m como un natural concreto pero arbitrario.
Significación: interpretar, por ejemplo, $m + 1$ como el consecutivo de m.
Idealización: el ostensivo $m + (m + 1) + (m + 2)$ evoca la suma de tres naturales consecutivos cualesquiera.
Reificación: se sintetiza la suma de tres naturales consecutivos en la expresión unitaria $m + (m + 1) + (m + 2)$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Práctica elemental 2. Aplicando las propiedades asociativa y conmutativa de la suma en $\mathbb{N}$ y agrupando términos semejantes en la expresión anterior, se obtiene $m + (m + 1) + (m + 2) = 3m + 3$. Por la propiedad distributiva en $\mathbb{N}$, se obtiene que $3m + 3 = 3 \times (m + 1)$, que es múltiplo de 3, ya que, $m + 1 \in \mathbb{N}$ por cierre de la suma en $\mathbb{N}$.</td></tr>
<tr><td>Intencionalidad</td><td>Objetos</td><td>Procesos</td></tr>
<tr><td>Reescribir la expresión $m + (m + 1) + (m + 2)$ como un múltiplo de 3.</td><td>Conceptos: números naturales, suma, producto, múltiplo.
Lenguajes: natural, simbólico.
Procedimientos: Simplificar la expresión $m + (m + 1) + (m + 2)$ hasta obtener $3m + 3$. Extraer factor común para obtener $3 \times (m + 1)$.
Propiedades disponibles (PD):
PD1. Asociativa de la suma en $\mathbb{N}$.
PD2. Conmutativa de la suma en $\mathbb{N}$.
PD3.Distributiva del producto respecto a la suma en $\mathbb{N}$.
PD4. Cierre de la suma en $\mathbb{N}$.
Proposiciones emergentes (PE):
PE1: $m + (m + 1) + (m + 2) = 3m + 3$.
PE2: $3m + 3 = 3 \times (m + 1)$
Argumentos: basados en las propiedades disponibles y la definición de múltiplo.</td><td>Idealización y representación: asociados al cálculo sintáctico para expresar $m + (m + 1) + (m + 2)$ como $3m + 3$ y $3m + 3$ como $3 \times (m + 1)$.
Reificación: los símbolos que participan del cálculo sintáctico se desprenden de los objetos a los que representan para participar de transformaciones.
Descomposición: los objetos son tratados como sistémicos para interpretar que $3 \times (m + 1)$ es múltiplo de 3.
Idealización: el ostensivo $3 \times (m + 1)$ evoca un múltiplo de 3.
Significación: interpretar que $3 \times (m + 1)$ es múltiplo de 3 y que $m + 1$ es un número natural.</td></tr>
</table>

Práctica elemental 3. Por tanto la suma de tres naturales consecutivos cualesquiera es múltiplo de 3.		
Intencionalidad	Objetos	Procesos
Declarar la verdad de la proposición.	*Conceptos:* números naturales, suma, números naturales consecutivos, múltiplo. *Lenguaje:* natural. *Proposición emergente:* la suma de tres naturales consecutivos cualesquiera es un múltiplo de 3. *Argumentos:* basados en la secuencia de prácticas elementales 1) a 2).	*Generalización*: partir de un natural dado arbitrario m y generalizar para todo natural. *Reificación:* los objetos y procesos previos constituyen una nueva entidad unitaria reconocida como la proposición demostrada. *Idealización:* el resultado de las prácticas anteriores se desmaterializa para ser interpretado como solución al problema.

El análisis ontosemiótico permite identificar como conflictos semióticos potenciales: traducir la expresión “suma de tres naturales consecutivos cualesquiera” de manera simbólica; evocar con un ostensivo como m un natural concreto pero arbitrario; considerar los objetos como sistémicos para interpretar que $3 \times (m+1)$ es un múltiplo de 3 y $m+1$ es un natural; considerar el carácter general de la regla por haber tomado m como natural, aunque arbitrario pero concreto; entre otros.

En la figura 3 presentamos el esquema argumentativo según Toulmin para la solución experta del primer apartado del problema.

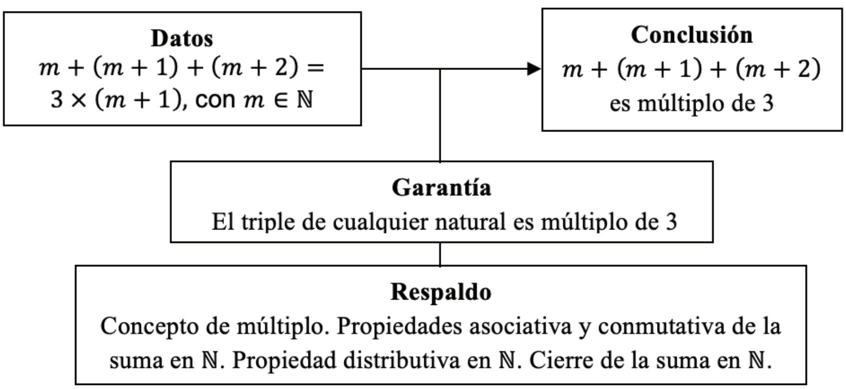


Figura 3. Modelo de Toulmin para la solución experta apartado a).

En la solución experta del apartado c) (Figura 4) los conflictos semióticos que anticipamos se reflejan en dificultades para traducir de manera simbólica ciertas expresiones como, "si se suman k naturales consecutivos, el resultado es múltiplo de k si y sólo si k es un natural impar"; reconocer, por ejemplo, en el ostensivo $\sum_{i=0}^{k-1}(m+i)\ k \times k'$ que la suma de k naturales consecutivos es múltiplo de k; tratar los objetos presentes en la demostración de la ida de la implicación como sistémicos para poder interpretar que k es un número impar; reconocer que, a partir de un natural cualesquiera k y dos números naturales cualesquiera siendo el primero mayor que el segundo ($k'\ y\ m$), la regla se generaliza para todo natural con dichas condiciones, entre otros.

1. Analizamos los siguientes ejemplos:
   Si $k = 2$, entonces $2 + 3 = 5$ no es múltiplo de 2.
   Si $k = 3$, entonces $2 + 3 + 4 = 9$ es múltiplo de 3.
   Si $k = 4$, entonces $2 + 3 + 4 + 5 = 14$ no es múltiplo de 4.
   Si $k = 5$, entonces $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$ es múltiplo de 5.

Conjetura: Si se suman k naturales consecutivos, el resultado es múltiplo de k si y sólo si k es un natural impar. De forma simbólica, sea $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{k-1}(m+i) = k \times k'$, con $k' \in \mathbb{N}$, $k' > m$ sí y sólo si k es un natural impar.

Demostración de la conjetura:

$\Rightarrow$)

2. Se trata de probar que, dado $m \in \mathbb{N}$, si $\sum_{i=0}^{k-1}(m+i) = k \times k'$ ($k' \in \mathbb{N}$, $k' > m$) entonces k es un natural impar.
3. Partimos de la hipótesis: $\sum_{i=0}^{k-1}(m+i) = k \times k'$, ($k' \in \mathbb{N}$, $k' > m$). Es posible descomponer la sumatoria en dos sumandos de la forma: $\sum_{i=0}^{k-1} m + \sum_{i=0}^{k-1} i = k \times k'$.
   En la primera sumatoria, todos los términos, k, son iguales a m, y la segunda corresponde a la suma de los $k-1$ primeros números naturales. Por tanto: $m \times k + \frac{(k-1)\times k}{2} = k \times k'$.
4. Dividimos a ambos lados de la equivalencia anterior por k, de manera que obtenemos una expresión equivalente: $m + \frac{(k-1)}{2} = k'$.
   Similarmente, multiplicando a ambos lados de la equivalencia por 2, obtenemos la expresión equivalente: $2m + k - 1 = 2k'$. De donde, $k = 2k' - 2m + 1$.
   Sacando factor común se obtiene $k = 2(k' - m) + 1$.
5. Puesto que, por hipótesis, $k' > m$, $k' - m \in \mathbb{N}$, lo que muestra que k es impar.

$\Leftarrow$)

6. Se trata de probar que dado $m \in \mathbb{N}$, si k es un natural impar entonces:
   $\sum_{i=0}^{k-1}(m+i) = k \times k'$, con $k' \in \mathbb{N}$, $k' > m$.
7. Si k es impar entonces $k = 2n + 1$ o bien $k = 2n - 1$ con $n \in \mathbb{N}$. En particular, tomamos $k = 2n + 1$, ya que, si se cambia la variable n por $n + 1$ en el caso $k = 2n - 1$ se obtiene $k = 2n + 1$.
8. Partimos del primer lado de la igualdad que queremos obtener, es decir:
   $\sum_{i=0}^{k-1}(m+i) = k \times k'$, con $k' \in \mathbb{N}$, $k' > m$. Es posible descomponer la sumatoria en dos sumandos: $\sum_{i=0}^{k-1}(m+i) = \sum_{i=0}^{k-1} m + \sum_{i=0}^{k-1} i$.
   En el primer sumando, todos los términos, k, son iguales a m, y el segundo es la suma de los $k-1$ primeros naturales. Por lo tanto: $\sum_{i=0}^{k-1} m + \sum_{i=0}^{k-1} i = m \times k + \frac{(k-1)\times k}{2}$
9. En la última identidad reemplazamos k por $2n + 1$ y simplificamos:
   $\sum_{i=0}^{k-1} m + \sum_{i=0}^{k-1} i = m \times (2n+1) + \frac{(2n+1-1)\times(2n+1)}{2} = m \times (2n+1) + n \times (2n+1)$.
   Sacando factor común: $m \times (2n+1) + n \times (2n+1) = (2n+1)(m+n)$,
   con $m + n = k' \in N$, por ser la suma cerrada en $\mathbb{N}$ y $k' > m$.
10. Lo que muestra que si k es un natural impar entonces $\sum_{i=0}^{k-1}(m+i) = k \times k'$, con $k' \in \mathbb{N}$, $k' > m$.

Figura 4. Solución experta apartado c).

El análisis de las prácticas que llevan a la solución del ítem d) (figura 5) nos lleva a considerar como potenciales conflictos traducir expresiones de manera simbólica, por ejemplo "la suma de cinco naturales que tienen distinto resto al dividirlos por 5"; interpretar y evocar con el ostensivo $5k + (5m + 1) + (5n + 2) + (5p + 3) + (5q + 4)$ la suma de cinco naturales que tienen distinto resto al dividirlos por 5 o con $5 \times (k + m + n + p + q + 2)$ un múltiplo de 5. También son previsibles dificultades asociadas al cálculo sintáctico donde los ostensivos se deben desprender de los objetos a los que representan para participar de transformaciones. Además, es posible que los estudiantes encuentren conflictos para considerar el carácter general de la regla (algunos vinculados con la posibilidad de generalizar para todo número natural que tiene distinto resto en la división por 5) a partir de haber tomado $\boldsymbol{k, m, n, p, q}$ naturales concretos pero arbitrarios. Finalmente, es posible prever dificultades al tratar de manera sistémica los objetos de forma que se pueda interpretar que $5 \times (k + m + n + p + q + 2)$ es múltiplo de 5, entre otras.

1. **Dado que los posibles restos de dividir un natural por 5 son 0, 1, 2, 3 o 4, los naturales que tienen distinto resto al dividirlos por 5 se pueden escribir como: $5k, 5m + 1, 5n + 2, 5p + 3$ o $5q + 4$, con $k, m, n, p, q \in \mathbb{N}$, por propiedades de la división de naturales.**
2. **La suma se podría representar de la siguiente manera (o en diferente orden):** $5k + (5m + 1) + (5n + 2) + (5p + 3) + (5q + 4)$.
3. **Aplicando las propiedades asociativa y conmutativa de la suma y la distributiva del producto respecto a la suma en $\mathbb{N}$ se obtiene que: $5k + (5m + 1) + (5n + 2) + (5p + 3) + (5q + 4) = 5 \times (k + m + n + p + q) + 10$. Por propiedad distributiva se tiene: $5 \times (k + m + n + p + q) + 10 = 5 \times (k + m + n + p + q + 2)$**
4. $5 \times (k + m + n + p + q + 2)$ **es un múltiplo de 5, ya que, $k + m + n + p + q + 2 \in \mathbb{N}$ por cierre de la suma en $\mathbb{N}$. Por tanto, la suma de cinco naturales cualesquiera que tienen distinto resto al dividirlos por 5 es múltiplo de 5.**

Figura 5. Solución experta apartado d).

La actividad matemática desarrollada en estas prácticas argumentativas expertas para los diferentes ítems se sitúa en un nivel 5 de RAE (Godino *et al.*, 2015), ya que, se llevan a cabo cálculos analíticos o sintácticos en los que intervienen parámetros.

3.3. Pautas de análisis

Se consideraron los siguientes grados de pertinencia para las respuestas de los estudiantes.

- Correcta (C). Una respuesta se considera correcta si se establece y garantiza la validez general de la proposición implicada (figura 8).
- Parcialmente correcta (PC). Una respuesta se considera parcialmente correcta si se basa en propiedades matemáticas correctas pero que no permiten valorar la validez de la proposición. Por ejemplo, aquellas argumentaciones abductivas en las que el dato es un conocimiento matemáticamente válido que implica la conclusión o aquellas argumentaciones deductivas por contraejemplo para el ítem c) (figura 9).
- Incorrecta (I). En otro caso (figura 6 o 7).

4. RESULTADOS

En esta sección se incluye, en primer lugar, una descripción de las argumentaciones empleadas por los participantes y los niveles de razonamiento algebraico asociados, analizando los logros y dificultades encontradas. En segundo lugar, se presentan los resultados de la puesta en común con los estudiantes sobre los tres primeros ítems del problema, identificando HDS.

4.1. Argumentaciones y niveles de RAE

En la tabla 2 se resumen los grados de pertinencia logrados por los estudiantes en cada ítem del problema según los tipos de estrategias argumentativas empleadas. Se observa que, los 31 participantes respondieron a los ítems a) y b), donde algunos emplearon más de un tipo de estrategia, y que dos no lo hicieron en los apartados c) y d).

Tabla 2. Grado de pertinencia de las producciones según los tipos de estrategias.

Tipo de estrategia argumentativa	Grado de pertinencia										Total
	Ítem a			Ítem b			Ítem c			Ítem d	
	I	PC	C	I	PC	C	I	PC	C	I	
Abductiva	4	5	0	8	4	0	0	0	0	17	38
Inductiva de un solo caso	4	0	0	4	0	0	0	1	0	0	9
Inductiva de varios casos	7	0	0	7	0	0	0	3	0	1	18
Plausible	4	0	0	3	0	0	0	0	0	1	8
Analógica	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
Deductiva	0	0	4	0	0	4	0	0	1	1	10
Deductiva por contraejemplo	1	0	0	0	0	0	0	6	0	6	13
Conjetura sin argumentación	3	0	0	2	0	0	12	5	0	3	25
Total	23	5	4	24	4	4	13	15	1	29	122

Como se observa en la tabla 2, los participantes tuvieron dificultades para resolver correctamente los apartados a), b) y especialmente d), en el que todos aquellos que respondieron lo hicieron de forma incorrecta. Los resultados fueron algo mejores en el ítem c) donde 15 respondieron de forma parcialmente correcta. Las argumentaciones más frecuentes empleadas en los ítems a) y b) fueron abductivas o inductivas de varios casos, en su mayoría incorrectas. Para el ítem c) la mayoría de los estudiantes propuso de forma incorrecta conjeturas sin dar ningún tipo de argumentación. Para el ítem d) propusieron con mayor frecuencia argumentaciones abductivas incorrectas.

A continuación, se relacionan los diferentes tipos de estrategias empleadas con los niveles RAE implicados en las prácticas matemáticas. Estos se ejemplificarán por medio de algunas de las respuestas más significativas de los estudiantes.

Tabla 3. Estrategias empleadas según los niveles RAE.

Tipo de estrategia argumentativa	Frecuencia								Total
	Ítem a				Ítem b				
	N0	N1	N2	N5	N0	N1	N2	N5	
Abductiva	2	7	0	0	5	7	0	0	21
Inductiva de un solo caso	4	0	0	0	4	0	0	0	8
Inductiva de varios casos	6	0	1	0	6	0	1	0	14
Plausible	3	1	0	0	2	1	0	0	7
Analógica	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Deductiva	0	0	0	4	0	0	0	4	8
Deductiva por contraejemplo	0	1	0	0	0	0	0	0	1
Conjetura sin argumentación	3	0	0	0	2	0	0	0	5
Total	18	9	1	4	19	8	1	4	64

De manera general, se observa una escasa actividad matemática de naturaleza algebraica; el nivel de RAE asociado oscila en su mayoría entre el nivel puramente aritmético y el proto-algebraico incipiente.

La tabla 3 muestra que, para los ítems a) y b), la actividad matemática desplegada en las argumentaciones abductivas o inductivas se situó de forma general entre un nivel aritmético (nivel 0 RAE) y proto-algebraico incipiente (nivel 1 RAE). Este último se asignó cuando lograron enunciar la regla general en lenguaje natural. La actividad de naturaleza algebraica (nivel 5 RAE) fue escasa y se observó solo en las argumentaciones deductivas (figura 8) propuestas por los mismos estudiantes tanto para el ítem a) como para el b).

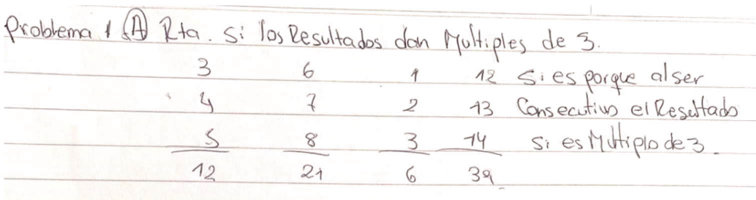
En la tabla 4 aparecen relacionadas las diferentes estrategias argumentativas empleadas para los ítems c) y d), según los niveles de RAE implicados. Esta tabla muestra que, para el ítem c) la actividad matemática basada en la elaboración de conjeturas sin argumentación se situó entre un nivel aritmético y proto-algebraico incipiente pues, en algunos casos, lograron enunciar reglas generales en lenguaje natural (nivel 1). Las prácticas argumentativas con carácter algebraico en c) fueron deductivas (nivel 4 RAE) o deductivas por contraejemplo (figura 9, nivel 5 RAE).

Tabla 4. Estrategias empleadas según los niveles RAE.

Tipo de estrategia argumentativa	Frecuencia							Total
	Ítem c				Ítem d			
	N0	N1	N2	N4/N5	N0	N1	N5	
Abductiva	0	0	0	0	9	8	0	17
Inductiva de un solo caso	1	0	0	0	0	0	0	1
Inductiva de varios casos	0	3	0	0	1	0	0	4
Plausible	0	0	0	0	1	0	0	1
Analógica	0	1	0	0	0	0	0	1
Deductiva	0	0	0	1	0	0	1	2
Deductiva-contraejemplo	0	3	1	2	1	5	0	12
Conjetura sin argumentar	10	7	0	0	3	0	0	20
Total	11	14	1	3	15	13	1	58

Salvo una argumentación deductiva de nivel 5 RAE, todas las prácticas desarrolladas para responder al ítem d) fueron de naturaleza aritmética o proto-algebraica incipiente.

A continuación, se ejemplifican las estrategias más representativas, así como los errores más frecuentes puestos de manifiesto en las producciones. Cada caso lo acompañamos con el modelo de Toulmin que caracteriza la argumentación, identificando los objetos y procesos implicados, así como el nivel de RAE asociado.



Datos. La suma de 3, 4 y 5 es 12.
La suma de 6, 7 y 8 es 21.
La suma de 1, 2 y 3 es 6.
La suma de 12, 13 y 14 es 39.

Conclusión.
La suma de tres naturales consecutivos es múltiplo de 3.

Garantía. La verificación en 4 casos particulares asegura la validez de la conclusión.

Respaldo. 12, 21, 6 y 39 son múltiplos de 3.

Figura 6. Respuesta de E8 al ítem a. Argumentación inductiva. Nivel 0 de RAE. Incorrecta.

La mayor frecuencia de respuestas incorrectas en las argumentaciones inductivas de varios casos para los ítems a) y b) puede deberse al hecho de que, en nivel educativo de primaria y secundaria se acepta la comprobación, en algunos casos particulares, como suficiente para argumentar la validez general de proposiciones (Stylianides y Stylianides, 2017). Como se muestra en la figura 6, el estudiante E8 empleó una argumentación inductiva para asegurar la validez del ítem a), que solo llegó a corroborar en cuatro casos particulares. En su argumentación aparecen involucrados los conceptos de suma, números consecutivos y múltiplo de 3, procedimientos aritméticos (suma de números naturales) y emerge la proposición “la suma es múltiplo de 3” que justifica “al ser consecutivos”. E8 usó de manera incorrecta parte de la proposición como su argumento. La actividad matemática es de naturaleza aritmética, pues solo intervienen números naturales particulares y la operación suma. La propiedad ser múltiplo de 3 no se usa para generar nuevos objetos, sino como la condición que se satisface de manera particular (en el respaldo) para asegurar la validez de la conclusión. Por lo tanto, el nivel RAE es 0 (Godino *et al.*, 2015).

En muchas producciones para los ítems a), b) y d) se emplearon argumentaciones abductivas, en las que los estudiantes propusieron posibles explicaciones que justifican algún hecho observado que actúa como su conclusión (Arce y Conejo, 2019). La mayoría fueron categorizadas como incorrectas.

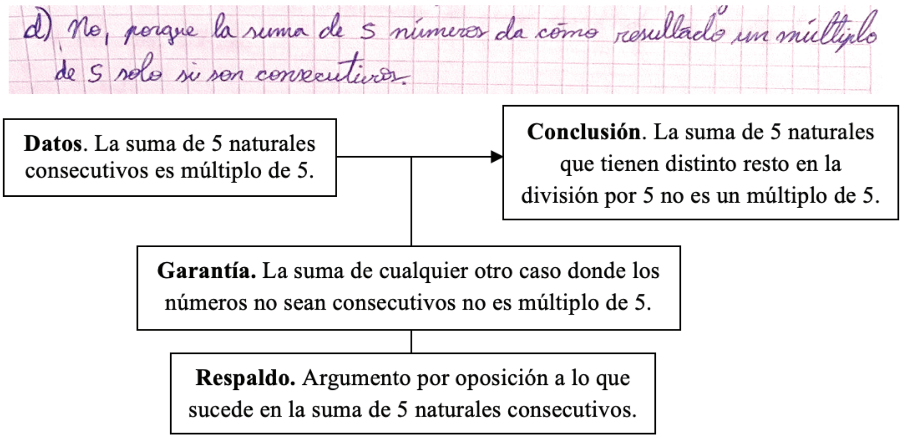


Figura 7. Respuesta de E7 al ítem d. Argumentación abductiva. Nivel 1 de RAE. Incorrecta.

Como se observa en la figura 7, E7 empleó una argumentación abductiva para afirmar que el resultado de la suma de cinco naturales que tienen distinto resto al dividirlos por 5 no es un múltiplo de 5 (proposición emergente). E7 había incluido las operaciones: "8+9+10+11+12=40" (suma de cinco naturales consecutivos) y "6+8+9+11+13=47" (suma de cinco naturales no consecutivos; no todos con resto distinto al dividirlos por 5) sin considerar en ningún momento cuál había sido el resto al dividir por cinco de los sumandos, ni que cinco números naturales consecutivos necesariamente tienen diferente resto al dividirlos por 5. Así, no llegó a idealizar de manera adecuada los ostensivos implicados en la propiedad que se espera demostrar. El nivel de RAE es 1 pues enunció una regla general en lenguaje natural (Godino *et al.*, 2015) "la suma de 5 números da como resultado un múltiplo de 5 solo si son consecutivos".

Otras argumentaciones abductivas frecuentes en a) y b) fueron categorizadas como parcialmente correctas, por ejemplo, la respuesta de E24 al ítem a) donde utilizó un dato válido que implica la conclusión "Si, siempre que se sumen 3 números consecutivos va a ser múltiplo de 3, ya que la cantidad de números que se suman es impar (3)". El nivel de RAE en la actividad matemática de E24 es 1 en tanto enunció una regla general en lenguaje natural.

El hecho de que los estudiantes hayan recurrido a particularizaciones para argumentar una proposición general, a argumentaciones abductivas o incluso, a la propuesta de conjeturas sin argumentación, puede estar motivado por algunas dificultades que han encontrado para representar en lenguaje simbólico apropiado números consecutivos generalizados o su suma. Por ejemplo, E9, quien propuso en el escrito una conjetura sin argumentarla para el ítem a) "sí, siempre que se sumen tres números reales continuos, el resultado será múltiplo de 3", mostró estas dificultades durante la puesta en común, pues escribió en la pizarra $(n) + (n1) + (n2)$ haciendo referencia a $n1$, por ejemplo, como el número continuado a n.

Por otra parte, las pocas respuestas correctas que se manifestaron en los ítems a), b) y c) se relacionan, en todos los casos, con argumentaciones deductivas. Por ejemplo, en la figura 8 se incluye la respuesta de E4 al apartado a). En las prácticas matemáticas que desarrolló E4, aparecen implicados los conceptos de suma, números consecutivos y múltiplo de 3, propiedades como asociativa y conmutativa de la suma en $\mathbb{N}$ o distributiva en $\mathbb{N}$. Emerge la proposición "la suma de tres naturales consecutivos cualesquiera es múltiplo de 3". Los procesos de idealización, generalización y reificación se combinan con la representación, traducción del lenguaje natural al simbólico y transformación en este registro; así como la significación (por ejemplo, para interpretar $x + 1$ como el consecutivo de x). El nivel de RAE es 5 pues aparecen involucrados parámetros como generalizadores y se opera con ellos (Godino *et al.*, 2015).

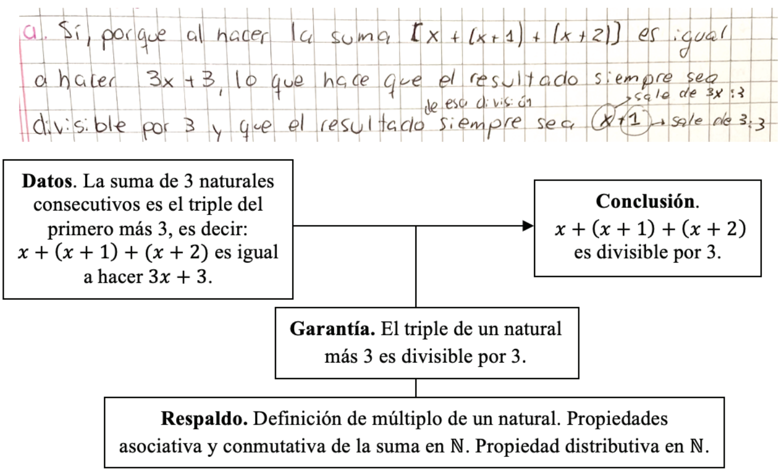


Figura 8. Respuesta de E4 al ítem a. Argumentación deductiva. Nivel 5 de RAE. Correcta.

Otro tipo de argumentación deductiva manifestada frecuentemente para el ítem c) fue la argumentación deductiva a partir del uso de contraejemplos. Estas prácticas fueron categorizadas como parcialmente correctas, puesto que, si bien el contraejemplo les sirvió para mostrar una excepción a una regla general posible y, por ende, conjeturar, no les permitió valorar la validez general de la conjetura.

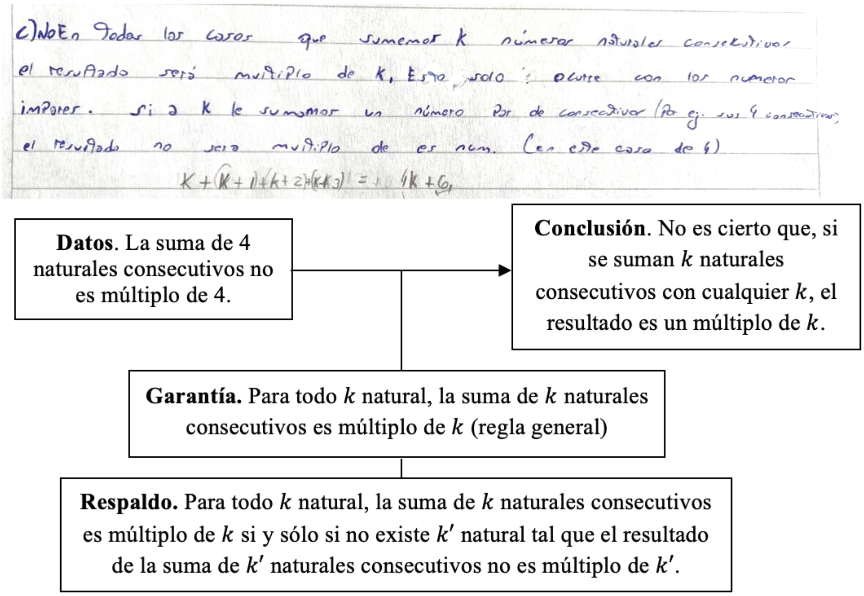


Figura 9. Respuesta de E27 al ítem c. Argumentación deductiva por contraejemplo. Nivel 5 de RAE. Parcialmente correcta.

Como se observa en la figura 9, E27 argumentó que la proposición "el resultado de la suma de cualquier k números naturales consecutivos es múltiplo de k si k es impar" es verdadera, basándose en que no lo es cuando se suma una cantidad par (4) de números naturales consecutivos. Para ello, empleó los conceptos de números consecutivos, impares y múltiplo, transitando por procesos de idealización y representación asociados al cálculo sintáctico para interpretar $k + (k + 1) + (k + 2) + (k + 3)$ como $4k + 6$, de significación para interpretar $k + (k + 1) + (k + 2) + (k + 3)$ como la suma de 4 números consecutivos o procesos de generalización pues obtuvo una regla general. El nivel de RAE asignado a la actividad es 5, en tanto intervienen parámetros como generalizadores y se opera con ellos para obtener expresiones canónicas.

En conclusión, la mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades para responder correctamente, debido al uso de argumentaciones inductivas en los ítems a) y b) para asegurar la validez general de las proposiciones involucradas, al planteamiento de conjeturas sin argumentación en el ítem c) y a la propuesta de argumentaciones abductivas incorrectas para el ítem d). Para el ítem c), si bien se han observado algunas conjeturas por argumentaciones inductivas o por analogía, la mayoría de los estudiantes elaboraron conjeturas sin argumentarlas (por ejemplo "se dará siempre y cuando k sea un número impar", E11). El planteamiento de argumentaciones abductivas incorrectas para el ítem d) deja ver que, si bien se generan nuevas ideas a través de un proceso creativo en la construcción del conocimiento (Soler-Álvarez y Manrique, 2014) estas no se corresponden con datos matemáticamente válidos y, por ende, no implican dicha conjetura ("sí, siempre es múltiplo de 5 porque son 5 los números que se suman", E24).

4.2. Puesta en común

Durante la puesta en común se encontraron algunos HDS que aportan información con cierta interpretación desde el punto de vista didáctico, en relación con los significados personales de los estudiantes sobre la demostración matemática, las dificultades identificadas en sus producciones y cómo la discusión ayuda en algunos casos a superar dichas dificultades.

HDS1. Los estudiantes identificaron la insuficiencia de mostrar con casos particulares la validez general de las proposiciones involucradas. Por ejemplo, el siguiente diálogo muestra cómo E31 y otros estudiantes de la clase dan cuenta de esto con la profesora (P):

E31:	Tendríamos que hacer infinitos ejemplos para abarcar todos.
P:	¿Por qué dice que tendríamos que mirar infinitos ejemplos?
Otro estudiante de clase:	Porque los naturales son infinitos.
P:	Entonces ¿vamos a poder mirar todos los números? ¿Cómo podemos estar seguros de que esta proposición vale siempre?
Otro estudiante de clase:	No, a menos que encuentre uno que no lo cumpla.

HDS2. Los estudiantes emplearon calificativos modales que reforzaron algunas de las argumentaciones plausibles que manifestaron en los escritos. Por ejemplo, E29 en su escrito empleó para 1 a) y b) argumentaciones plausibles, reforzándolas en la puesta en común con calificativos modales como “inevitablemente”, “no puede fallar”, “hasta ahí llegué”.

HDS3. Los estudiantes tuvieron dificultades para representar en lenguaje simbólico apropiado el consecutivo de un natural y la suma de tres naturales consecutivos. Sin embargo, progresaron en su representación durante la puesta en común, gracias a la discusión sobre el ejemplo $101 + 102 + 103 = 101 + (101{+}1) + (101{+}2)$ que les permitió expresar el consecutivo de un natural n como $n + 1$ y el consecutivo de este como $n + 2$.

HDS4. Los estudiantes encontraron limitaciones para argumentar sin particularizar por qué $3n + 3$ es un múltiplo de 3. Por ejemplo, E27 manifestó dichas dificultades en la discusión, aunque se puede ver cómo se produce un avance hacia una argumentación general de la proposición.

P:	Esa expresión a la que llegaron $3n + 3$, ¿se puede escribir como 3 por un número entero?
E27:	Sí, hay que reemplazar la n por el valor.
P:	¿Es necesario? volvemos para atrás a los casos particulares.
Otra estudiante de clase:	Hay que sacar factor común el 3. Te queda 3 por $n + 1$ y $n + 1$ multiplica al número, y ese número multiplicado por 3 va a ser múltiplo de 3.

HDS5. En la puesta en común se establecieron analogías con la suma de tres naturales consecutivos para argumentar el ítem b). Por ejemplo, cuando E29, que propuso una argumentación abductiva y plausible en su informe escrito, en la pizarra desarrolló una argumentación deductiva para validar la proposición involucrada:

E29: O sea, fue seguir lo mismo que se había explicado antes de las tres n, pero ahora se le agregan dos más porque sería por 5, entonces también se le agregan otros consecutivos, pasando del segundo consecutivo, hay un cuarto y un quinto. De ahí se vuelven a aplicar las mismas propiedades, la conmutativa y la asociativa, y se juntan las n, todos los números, y se puede reducir como $5n + 10$, que es la suma de los consecutivos, y termina quedando $5 \times (n + 10)$. Sería así ¿no?

HDS6. Los estudiantes destacaron dos propiedades de los números 3 y 5, el ser primo o impar, para conjeturar cuándo es cierto que si se suman k naturales consecutivos el resultado es múltiplo de k. Se observó, por ejemplo, que ante la afirmación de E7 "la consigna se cumple cuando k pertenece a los primos, pero 2 también es primo y no lo cumple, entonces cuando k pertenece a los primos y es mayor a 2", E23 le propuso un contraejemplo ($k = 9$), que le permitió a E7 avanzar en sus significados iniciales y reformular su conjetura.

5. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Los resultados de nuestra investigación muestran que los estudiantes recurrieron en la mayoría de los casos a argumentaciones no deductivas (inductivas, abductivas, plausibles) para validar las proposiciones implicadas en el problema implementado. Si bien dichas argumentaciones son fundamentales en los procesos de exploración para soportar conjeturas y ayudan a acercarse a la verdad de una teoría o refinarla, no permiten validar de manera general el conocimiento matemático, como si lo hacen las argumentaciones deductivas (Arce y Conejo, 2019; Molina y Samper, 2019). En muchos casos, los estudiantes asumieron como suficiente el uso de la abducción, o en otros, la comprobación en algunos casos particulares, limitaciones reconocidas por diversos investigadores en Educación Matemática como constituyentes de obstáculos para construir demostraciones (Arce y Conejo, 2019; Markiewicz *et al.*, 2021; Stylianides y Stylianides, 2017). El uso de argumentaciones inductivas es, en general, el más utilizado por los estudiantes (Soler-Álvarez y Manrique, 2014), aunque, se consideran deficientes pues, incluso si una afirmación es verdadera para todos los ejemplos que el estudiante verificó, todavía podría haber un contraejemplo (Weber *et al.*, 2020).

El análisis de sus prácticas, en términos de los objetos matemáticos, especialmente, de los argumentos empleados, el grado de generalidad y la formalización en el lenguaje, muestran un escaso carácter algebraico en la actividad desarrollada (manifestado en las pocas argumentaciones deductivas de nivel 4 o 5 de RAE) y la prevalencia de argumentaciones intuitivas o informales (Godino *et al.*, 2015). Este hecho puede relacionarse con la escasa familiaridad de los estudiantes, no solo con el lenguaje formal esperado en la escritura de las demostraciones (Lew y Mejía-Ramos, 2019), sino con la propia estructura, funcionalidad y reglas internas de la demostración (Nagel *et al.*, 2018).

El análisis también nos permitió identificar conflictos semióticos que obstaculizan la transición hacia la matemática más avanzada. Algunos están vinculados con la interpretación por parte de los estudiantes de qué elementos son necesarios y suficientes para construir una demostración, y otros, anticipados a priori, relacionados a los procesos que se deberían efectuar durante el desarrollo de una demostración. Fundamentalmente, se encontraron conflictos asociados a los procesos de representación y descomposición que se reflejaron en dificultades para traducir afirmaciones en lenguaje natural de manera simbólica, recurrir a ostensivos adecuados para representar un objeto ideal o considerar los objetos como sistémicos para interpretar, por ejemplo, que $3x + 3$ es múltiplo de 3.

Pese a las dificultades puestas en evidencia por los estudiantes, la discusión llevada a cabo en la puesta en común les permitió reconocer que las argumentaciones no deductivas no son suficientes para validar las proposiciones matemáticas y proponer argumentaciones deductivas para demostrar algunas de las proposiciones implicadas. Promover los espacios de discusión en estas clases es indispensable para favorecer la comprensión sobre la demostración, pues permite a los estudiantes tomar conciencia de sus errores, replantear sus argumentos y conjeturas y lograr consensos sobre aspectos esenciales que se van a aceptar en este nivel (Espinosa *et al.*, 2010).

6. CONCLUSIONES

El estudio de la demostración ha sido objeto de diferentes aproximaciones y enfoques en las investigaciones en Educación Matemática (Alfaro-Carvajal *et al.*, 2019; Godino y Recio, 2001; Stylianides *et al.*, 2017). En la demostración, se debe producir un argumento matemático a favor o en contra de una proposición matemática. Este argumento debe ser matemáticamente sólido y formulado en un discurso que sea conceptualmente accesible por los miembros de la comunidad donde se comparte (Stylianides y Stylianides, 2017). Sin embargo, la complejidad intrínseca a la actividad matemática implicada hace que, desde el punto de vista de su enseñanza y aprendizaje, sea necesario considerar e investigar la existencia de diferentes formas de argumentar en las clases de matemáticas reconociendo sus diversos grados de formalización.

El objetivo de nuestra investigación ha sido analizar los significados personales de estudiantes argentinos que acceden a grados universitarios en los que la demostración matemática tiene un papel importante en su día a día. Hemos empleado el modelo de Toulmin para clasificar las argumentaciones producidas y el análisis ontosemiótico para describir las prácticas matemáticas desarrolladas e identificar su nivel de RAE. Este análisis nos ha permitido reconocer conflictos semióticos, vinculados tanto con la concepción de los propios participantes sobre lo que es (necesario y suficiente en) una demostración matemática, como con la complejidad de los objetos y procesos matemáticos implicados. Aunque estos resultados no permiten hacer generalizaciones debido al tamaño de la muestra, dejan entrever la significativa distancia entre los significados personales y los significados institucionales pretendidos sobre la demostración en el nivel universitario (Lew y Mejía-Ramos, 2019; Markiewicz *et al.*, 2021; Recio y Godino, 2001; Rocha, 2019). Asimismo, los resultados de la puesta en común dan cuenta de la importancia de promover estos espacios de discusión, puesto que, los estudiantes lograron reconocer la insuficiencia de las argumentaciones inductivas, abductivas o plausibles para validar el conocimiento matemático y la necesidad de recurrir a las argumentaciones deductivas para tal fin.

Así, este trabajo ayuda a problematizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la demostración en función de los objetos y procesos que son necesarios movilizar para avanzar hacia un mayor nivel de algebrización, permitiendo a los estudiantes superar sus dificultades en la transición hacia matemáticas más avanzadas (Lew y Mejía-Ramos, 2019; Markiewicz *et al.*, 2021; Stylianides y Stylianides, 2017). A su vez, invita a los profesores a conocer las estrategias argumentativas utilizadas por los estudiantes y considerar en sus decisiones instruccionales las dificultades ante la demostración.

Como futuras líneas de investigación, resultaría interesante conocer si la formación que reciben los estudiantes de estos grados mejora su competencia para desarrollar demostraciones y cuál es la evolución de los tipos de argumentaciones y el grado de formalización. Además, sería conveniente ampliar el estudio con estudiantes de educación secundaria, así como con estudiantes de otras titulaciones y contextos educativos. Esto posibilitaría tener una comprensión más profunda sobre la problemática, con la intención de diseñar propuestas de enseñanza que permitan superar las dificultades diagnosticadas en esta y otras investigaciones, favoreciendo la transición desde las argumentaciones intuitivas informales hacia prácticas demostrativas de mayor grado de sofisticación en el nivel secundario y universitario.

REFERENCIAS

Alfaro-Carvajal, C., Flores-Martínez, P. y Valverde-Soto, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia, 33*(2), 55-75. https://doi.org/10.15359/ru.33-2.5

Arce, M. y Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: relaciones con el conocimiento matemático. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 163-172). SEIEM.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemática*. Una empresa docente.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (18), 1-20. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas* [Tesis doctoral]. Repositorio de la Universidad de Granada.

Chacón, I. M. (2009). Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación Matemática, 21*(3), 5-32.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Routledge.

Espinosa, A. J., Ávila, N. Y. S. y Mendoza, S. M. G. (2010). La comunicación: eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber, 1*(2), 173-202.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105. https://doi.org/10.1174/021037010790317243

Gaita, C., Wilhelmi, M. R, Ugarte, F. y Gonzales, C. (2023). Indicadores de niveles de razonamiento algebraico elemental en educación primaria en la resolución de tareas de proporcionalidad con tablas de valores. *Educación Matemática, 35*(3), 49-81. https://doi.org/10.24844/EM3503.02

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The ontosemiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Godino, J. D. y Burgos, M. (2017). Perspectiva ontosemiótica del razonamiento algebraico escolar. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en educación matemática XXI* (pp. 49-66). SEIEM.

Godino, J. D., Font, V. y Batanero, C. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *RECHIEM, 12*(2), 47-59. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 117-142.

Godino, J. D. y Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(3), 405-414.

Inglis, M. y Mejía-Ramos, J. P. (2005). La fuerza de la aserción y el poder persuasivo en la argumentación en matemáticas. *Revista Ema, 10*(2-3), 328-353.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P. y Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 3-21. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

Juthe, A. (2005). Argument by analogy. *Argumentation, 19*(1), 1-27. https://doi.org/10.1007/s10503-005-2314-9

Larios, V., Arellano, C. y González, N. (2018). Análisis de argumentos producidos por alumnos de bachillerato al resolver problemas de geometría. *REDIMAT, 7*(3), 280-310. http://dx.doi.org/10.17583/redimat.2018.2343

Lew, K. y Mejía Ramos, J. P. (2019). Linguistic conventions of mathematical proof writing at the undergraduate level: Mathematicians' and students' perspectives. *Journal for Research in Mathematics Education, 50*(2), 121-155. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.2.0121

Markiewicz, M. E., Etchegaray, S. C. y Milanesio, B. (2021). Análisis ontosemiótico de procesos de validación en estudiantes del último año de la escuela secundaria. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 17*(62).

Marmolejo, E. y Moreno, G. (2021). Unidad cognitiva: argumentar-conjeturar-demostrar. En E. Marmolejo, G. Moreno, J. M. López-Mojica y M. E. Méndez-Guevara (Eds.), *Demostración Matemática Escolar: Propuestas para su Innovación* (pp. 29-36). CLAVE.

Marraud, H. (2007). La analogía como transferencia argumentativa. *Revista de Teoría, Historia y Fundamentos de la Ciencia, 22*(2), 167-188.

Molina, O., Font, V. y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 93-116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484

Molina, O. y Samper, C. (2019). Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. *Bolema, 33*, 109-134. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a06

Nagel, K., Schyma, S., Cardona, A. y Reiss, K. (2018). Análisis de la argumentación matemática de estudiantes de primer año. *Pensamiento Educativo, Revista de Investigación Latinoamericana, 55*(1), 1-12. https://doi.org/10.7764/PEL.55.1.2018.10

Pedemonte, B. y Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. *Journal of Mathematical Behavior, 41*, 104-122. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.008

Pedemonte, B. y Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 281-303. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9275-0

Polya, G. (1954). *Induction and Analogy in Mathematics, Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton.

Quercia, M., Pirro, A. y Moro, L. (2014). Las prácticas matemáticas en los inicios del nivel superior. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 745-754). Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.

Recio, A. y Godino, J. D. (2001). Institucional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 83-99. https://doi.org/10.1023/A:1015553100103

Rocha, H. (2019). Mathematical proof: From mathematics to school mathematics. *Philosophical transactions of the royal society: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 377*(2140), 1-12. https://doi.org/10.1098/rsta.2018.0045

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra*. Libros del zorzal.

Soler-Álvarez, M. N. y Manrique, V. H. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(2), 191-219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1026

Stylianides, A., Bieda, K. y Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. En A. Gutierrez, G. Leder y P. Boero (Eds.), *Second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues* (pp. 315-351). Sense Publishers.

Stylianides, A. J., Komatsu, K., Weber, K. y Stylianides, G. J. (2022). Teaching and learning authentic mathematics: The case of proving. En *Handbook of Cognitive Mathematics* (pp. 727-761). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-03945-4_9

Stylianides, A. J. y Stylianides, G. J. (2022). Introducing students and prospective teachers to the notion of proof in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 66*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100957

Stylianides, G. J. y Stylianides, A. J. (2017). Based Interventions in the area of proof: The past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 119-127.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 237-266). National Council of Teachers of Mathematics.

Toulmin, S. (2003). *The Uses of Arguments*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005

Weber, K., Lew, K. y Mejía Ramos, J. P. (2020). Using expectancy value theory to account for students' mathematical justifications. *Cognition and Instruction, 38*(1), 27-56. https://doi.org/10.1080/07370008.2019.1636796

Autor de correspondencia.

Bettina Milanesio

Dirección: Departamento de Didáctica de la Matemática,
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España.
Campus Universitario de Cartuja C.P. 18071 (Granada) Granada
bettinamilanesio@gmail.com

 https://doi.org/10.24844/EM3603.09

Significado del límite expresado por estudiantes universitarios

Meaning of limit of a function expressed by undergraduate students

Yosenith González Flores,[1] Ana Belén Montoro Medina,[2] Juan Francisco Ruiz Hidalgo[3]

Resumen: El concepto de límite es un elemento central dentro del análisis matemático y tiene especial interés en educación por su complejidad y las dificultades para su enseñanza y aprendizaje. En este trabajo se analizan y sintetizan los significados que atribuyen estudiantes al concepto de límite de una función real de variable real y se proporciona un sistema de categorías completo funcional y fiable para su análisis, que proporciona una organización de estudiantes en 4 perfiles de significado. Se trata de un estudio de naturaleza descriptiva en el que se analizan las respuestas a un cuestionario semántico de 38 estudiantes de primer curso universitario que están comenzando su formación sobre este tema. El examen de los datos se realizó mediante un análisis de contenido y la síntesis de los significados mediante un análisis clúster. Los elementos que caracterizan los significados son clásicos, como objeto, proceso, alcanzabilidad o rebasabilidad, junto a los que hay que tener en cuenta otros que se centran en propiedades, usos y representaciones, y permiten sintetizar las respuestas en cuatro perfiles. La mayoría de los estudiantes manifiestan pocas características matemáticas de la noción de límite, pero las enriquecen proponiendo ejemplos de aplicación o modos de uso del límite que relacionan con interpretaciones intuitivas.

Fecha de recepción: 6 de septiembre de 2022. **Fecha de aceptación:** 17 de julio de 2024.

[1] Universidad Nacional de Costa Rica, Costa Rica, yosenith.gonzalez.flores@una.ac.cr, https://orcid.org/0000-0002-8836-0160.

[2] Universidad de Granada, España, amontoro@ugr.es, https://orcid.org/0000-0001-9344-5778.

[3] Universidad de Granada, España, jfruiz@ugr.es, https://orcid.org/0000-0002-4805-6922.

Palabras clave: *significado de un contenido matemático; concepto de límite; cálculo; estudiantes universitarios.*

Abstract: The concept of limit is a central element in Calculus and has special interest in education due to its complexity and the difficulties in its teaching and learning. In this work, the meanings that students attribute to the concept of limit of a real function of real variable are analyzed and synthesized. A complete usable system of categories is provided, which allows to organize the students in 4 profiles of meaning. This is a descriptive study in which the answers to a semantic questionnaire of 38 first-year university students who are beginning their training on this subject are analyzed. The analysis of the data was carried out through a content analysis and the synthesis of the meanings through a cluster analysis. The elements that characterize the meanings such as object, process, reachability or exceedance, are blended with those that must be taken into account, others that focus on properties, uses and representations and allow the responses to be synthesized in four profiles. Most students show few mathematical characteristics of the notion of limit but they enrich them by proposing application examples or modes of use of the limit that relate to intuitive interpretations.

Keywords: *meaning of a mathematics concept: concept of limit; calculus; undergraduate students*

1. INTRODUCCIÓN

Los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial e integral tienen gran importancia dentro de la investigación en la Educación Matemática (Jacques y Viol, 2020). Particularmente, el concepto matemático de límite ha sido objeto de investigación en educación matemática desde los trabajos pioneros de David Tall y Solomon Vinner (Tall, 1980; Tall y Vinner, 1981) y continúa en la actualidad (González-Flores *et al.*, 2021). Uno de los motivos de este interés es que se trata de un elemento central dentro del análisis matemático, concretamente es el fundamento de la teoría de la aproximación, de la continuidad y del cálculo diferencial e integral (Cornu, 2002; Kidron, 2014). El interés también puede ser debido a que se trata de un elemento incluido en muchos currículos escolares (p.e. MECD, 2014). Pero sin duda, la razón principal de este interés en investigar sobre límites se debe a la complejidad del concepto de límite y las dificultades para su enseñanza y aprendizaje (Cornu, 2002), que provoca que autores como Kidron y Tall (2014), Swinyard (2011), o Tall y Katz (2014) realicen investigaciones para profundizar en los diferentes aspectos vinculados a su comprensión. Debido a la estrecha relación entre comprensión y significado (Thompson, 2016), uno de los aspectos en los que se centran algunas investigaciones es en los significados que expresan estudiantes de secundaria y universidad.

En efecto, autores como Blázquez (1999), Blázquez (2000), Fernández-Plaza *et al.* (2013), Monaghan (1991) o Williams (1991) han determinado que estos estudiantes poseen una noción intuitiva del límite y lo describen con términos tales como tender, aproximar, alcanzar, rebasar y límite... Asimismo, señalan que algunos docentes de matemáticas emplean estos términos en sus clases y, por tanto, sus estudiantes los usan con un sentido cotidiano que dista del significado matemático. No obstante, otros autores como Sierra *et al.* (2000) plantean que algunas concepciones y términos que emplean los estudiantes pueden relacionarse con concepciones epistemológicas que en su momento fueron planteadas por matemáticos como D'Alembert, que afirmaba que el límite no se puede alcanzar, y Cauchy, para quien es alcanzable.

Este trabajo pretende analizar y sintetizar los significados que atribuyen estudiantes de primer curso en titulaciones científicas de la Universidad Nacional en Costa Rica (UNA), al concepto de límite en un punto de una función real de variable real, durante la enseñanza de este concepto.

Para lograr dicho objetivo utilizamos un cuestionario semántico (Matthewson, 2004) que nos permitió recoger información sobre las ideas básicas que tienen los estudiantes sobre el concepto. Los datos se organizaron usando un sistema de categorías adaptado de investigaciones previas (Fernández-Plaza *et al.*, 2013; González-Flores *et al.*, 2021) que, a su vez, utilizan referentes clásicos (p.e., Blázquez y Ortega, 1998; Cornu, 2002; Cottrill *et al.*, 1996; Monaghan, 1991; Sfard, 1991). Este sistema nos permite describir los significados del concepto de límite que expresan los estudiantes de forma ágil y precisa. Posteriormente, un análisis de conglomerados nos permitió establecer cuatro perfiles de significado que sintetizan los resultados.

Destacamos que los elementos clásicos límite como objeto o proceso, alcanzabilidad y rebasabilidad, junto con algunas propiedades, usos y las representaciones son suficientes para determinar los significados de límite que expresan los estudiantes. Aunque se obtiene bastante información de las respuestas a la pregunta de definición, la riqueza de detalles que proporcionan las respuestas a las preguntas sobre cómo se representa y para qué sirve el límite, nos permiten hacer descripciones muy detalladas y completas. Finalmente, de los perfiles se deduce que los estudiantes encuestados basan sus respuestas principalmente en aspectos intuitivos más que en las propiedades matemáticas.

2. ANTECEDENTES TEÓRICOS

El fundamento teórico de nuestra investigación corresponde al concepto de significado de un contenido matemático escolar, el cual ha sido ampliamente estudiado y desarrollado en educación matemática por autores como Steinbring (1997, 2006), Vergnaud (2009, 2013), Kilpatrick *et al.* (2005), Thompson (2013, 2016), Thompson y Milner (2019), o Byerley y Thompson (2017). Concretamente para nuestro estudio empleamos la noción de significado desde una perspectiva semántica planteada por Rico (2012; 2013; 2016a; 2016b). Esta consideración de significado corresponde a una doble fundamentación. Por un lado, filosófica, que se basa en la consideración de significado introducida por Frege (1998) a finales del siglo XIX que establece la diferencia entre signo y significado y que, asimismo, en el significado diferencia entre referencia y sentido. Por otro lado, hay una fundamentación cognitiva, atendiendo a los desarrollos en psicología cognitiva de finales del siglo pasado (Bell *et al.*, 1983; Hiebert y Lefevre, 1986).

Con respecto al fundamento filosófico, Rico (2012; 2013; 2016a; 2016b) y Rico y Ruiz-Hidalgo (2018) presentan la idea de triángulo semántico a través de tres componentes: su referencia o concepto propiamente y la estructura lógica en la que se inserta; los signos o términos con el que se expresa, gráficos y notaciones que lo representan; y su sentido o modo en que vienen dados los objetos que encajan en el concepto, o modos de uso con que puede ser entendido, aplicado e interpretado. Estas ideas a su vez han sido desarrolladas y adaptadas para el estudio de conceptos y contenidos de las matemáticas escolares mediante el uso de tres componentes para el análisis: estructura conceptual, sistemas de representación y los sentidos y modos de uso.

Para efectos de nuestra investigación, consideramos relevante la consideración de este doble fundamento del significado y por tanto creemos que conocer el significado de un concepto matemático implica saber "su definición, representarlo, mostrar sus operaciones, relaciones y propiedades y sus modos de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problemas" (Rico, 2016a, p. 94).

Nuestro estudio se basa en las tres componentes del significado que detallan Rico (1997) y Fernández-Plaza (2016): (1) *la estructura conceptual,* que engloba los conceptos, las propiedades, los procedimientos, las proposiciones y los argumentos que se elaboran junto con sus criterios de veracidad, asociados a un contenido matemático. La estructura conceptual a su vez se divide en el campo conceptual, correspondiente al conjunto de conceptos y sus relaciones, y en el campo procedimental, que a su vez atañe a los procedimientos y sus relaciones (Rico, 2012); (2) *los sistemas de representación,* que refieren a los signos, a las notaciones gráficas o simbólicas de las nociones matemáticas que manifiestan los conceptos y los procedimientos al igual que sus propiedades, características y relaciones (Castro y Castro, 1997; Kaput 1987); y (3) *sentido y modos de uso,* que aluden a las distintas situaciones a las que da respuesta un concepto matemático, a los fenómenos que organiza, a los contextos a los que responde y a los términos y modos de uso, lo que posibilita mejorar el significado del concepto (Ruiz-Hidalgo, 2016).

3. METODOLOGÍA

Presentamos un estudio de naturaleza mixta cualitativa-cuantitativa y descriptiva (Cohen *et al.*, 2018) que pretende conocer y sintetizar los significados de límite que manifiestan estudiantes universitarios.

3.1. Cuestionario

Para obtener información acerca del significado que tienen los estudiantes del concepto de límite, elaboramos un cuestionario semántico de elicitación directa (Matthewson, 2004) con preguntas de respuesta abierta que se administró durante la enseñanza del tema de límites. Con este cuestionario pretendemos indagar en la forma que tienen los estudiantes de entender la noción de límite, cómo lo representan, y qué términos y aplicaciones usan para evidenciar su sentido. Los cuestionarios semánticos permiten recoger "palabras, términos, símbolos, gráficas, descripciones, explicaciones y otras notas que expresan y representan un modo de apropiación por cada sujeto del concepto considerado" (Martín *et al.*, 2016, p. 56).

El cuestionario se compone de 4 tareas y se construyó con base en las tres componentes del significado: estructura conceptual, sistemas de representación y sentido. La primera pregunta, diseñada considerando elementos de la estructura conceptual, pedía a los estudiantes que explicaran con sus propias palabras qué significa la definición de límite de una función en un punto. La segunda, centrada en los sistemas de representación, solicitaba a los estudiantes que utilizaran uno o varios dibujos, esquemas o figuras o lo que consideraran necesario para representar la definición de límite. La tercera y cuarta se hicieron con base en los elementos del sentido, y más concretamente, atendiendo a las situaciones y en los términos y modos de uso, respectivamente. Para ello, en la tercera pregunta se les pedía que nombraran aplicaciones que pueden tener los límites y en la cuarta otros significados de la palabra límite fuera de la matemática. Se les indicaba que podían utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que consideraran necesario.

Como cada una de las tareas fue diseñada pensando en cada una de las componentes de nuestra terna semántica de significado (estructura conceptual, sistemas de representación, sentido y modos de uso), esperábamos que las respuestas a cada tarea atendieran a cada componente. Sin embargo, la riqueza de las respuestas a las tareas es tal que, no solo informan de la componente con la que está relacionada, sino que también enriquece la información sobre el resto de componentes. Por ejemplo, las respuestas a la tarea 2, centrada en los sistemas de representación, aportó considerable información acerca de aspectos estructurales y relativos a los modos de uso del límite, es decir, había estudiantes que, en una representación gráfica, por ejemplo, evidenciaban aspectos estructurales, como las categorías: Límite como Objeto (LO), Límite como Proceso (LP), Vinculación entre Límite e Imagen (LI), Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC) entre otras. Esto ocurrió con todas las tareas, que informaban de cualquiera de las tres componentes del significado.

3.2. Sujetos

Los documentos analizados corresponden a producciones escritas proporcionadas por 38 estudiantes de la asignatura Cálculo I de las titulaciones de Biología e Ingeniería Química Industrial de la Universidad Nacional de Costa Rica. Se trata de estudiantes que tienen su primer contacto con la noción de límite. Durante las clases, los profesores dan más importancia a la comprensión del concepto que a aspectos más técnicos como las definiciones o las demostraciones. El cuestionario lo administramos después de que el profesor había explicado el concepto de límite.

3.3. Análisis de contenido

El examen de los datos recogidos se realizó mediante un análisis de contenido (Krippendorf, 2004) que es una técnica de investigación que permite hacer inferencias válidas y replicables de producciones escritas. Para realizar este análisis, se tomó un sistema de categorías previo desarrollado en González-Flores *et al.* (2021), codificando los datos de manera dicotómica como ausencia o presencia de cada una de las categorías en las producciones de los estudiantes.

El sistema de categorías está basado en características clásicas que se han venido utilizando en investigaciones sobre límite (p.e. Blázquez y Ortega, 1998; Cornu, 2002; Cottrill *et al.*, 1996; Monaghan, 1991; Sfard, 1991) adaptado por Fernández-Plaza *et al.* (2013) para caracterizar aspectos estructurales y que González-Flores *et al.* (2021) han sistematizado al estudiar las definiciones proporcionadas por estudiantes. El sistema final de categorías está formado por 13, tomadas y adaptadas de González-Flores *et al.* (2021), excepto las categorías Otra Representación (OR) y Situaciones (ST) que surgieron de manera inductiva del análisis de las respuestas (en la tabla 1 se presenta la descripción de las categorías).

Tabla 1. Sistema de categorías de nuestro estudio y su respectiva descripción

Categoría	Descripción
Límite como objeto (LO)	Los sujetos establecen distintas referencias para el objeto límite (Cottrill *et al.*, 1996; Fernández-Plaza *et al.*, 2013, Sfard, 1991; Tall, 1980). Se entiende límite como una noción estática. Algunas palabras claves para identificar esta categoría son: número, valor, lugar, frontera, restricción, extremo, fin, fecha límite, etc. Si un sujeto dice que un límite se aproxima a un número, pero no dice que el límite sea el número, entonces no hay evidencia de LO.
Límite como proceso (LP)	Los sujetos refieren al límite de manera procesual (aproximación) (Cottrill *et al.*, 1996; Fernández-Plaza *et al.*, 2013, Sfard, 1991; Tall, 1980). Es una noción dinámica. Los sujetos hacen referencia a un proceso de obtención o procedimiento. Algunas palabras claves para identificar esta categoría son: aproximarse, tiende, acercar, etc. Si el sujeto usa un verbo de procedimiento, y no dice nada sobre el objeto límite, asumimos que evidencia LP, como por ejemplo "estudia lo que ocurre alrededor de los puntos", "análisis de un punto". Las categorías límite como objeto y límite como proceso no son mutuamente excluyentes.
Vinculación entre límite e imagen (LI)	Los sujetos atribuyen al límite un valor de imagen de la función (Fernández-Plaza *et al.*, 2013). La alusión a la imagen puede hacerse de manera implícita, por ejemplo, en la afirmación "es el valor máximo o más próximo al punto que pertenece a una función" dice que pertenece a una función, por ende, ese valor debe ser imagen, "el número al que tiende una función cuando sustituyo valores en una variable específica" pues al sustituir los valores se entiende que son las imágenes. Cuando los sujetos vinculan el límite con un valor de la imagen, en particular, están evidenciando el límite como objeto, es decir, si se da LI entonces se da LO.
Coordinación entre las variables x y y (CV)	Los sujetos indican que es un proceso en el que están implicadas las dos variables (x y y), una depende de la otra. Los sujetos evidencian convergencia de y en relación con la de x, es la aproximación de las imágenes a un número, cuando x se aproxima al punto.
Referencia a las variables x y y (RV)	Los sujetos usan palabras específicas para aludir a las variables independiente y dependiente de la función. Algunas palabras claves para identificar esta categoría son: preimagen, imagen, punto en x, punto en y, etc.
Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)	Los sujetos expresan que los procesos de cálculo del límite, por la izquierda y por la derecha, deben dar el mismo resultado (Fernández-Plaza *et al.*, 2013).
Propiedades matemáticas (PM)	Los sujetos hacen referencia a propiedades o nociones que son verdaderas en la matemática no contempladas en el resto de las categorías de análisis.

Representación gráfica (RG)	Los sujetos realizan una representación gráfica (en el plano cartesiano) para el límite.
Otra Representación (OR)	Los sujetos realizan una representación diferente a la representación gráfica para el límite.
Aspectos de no alcanzabilidad (NA)	Los sujetos expresan la imposibilidad de alcanzar el límite. (Cornu, 1991; Fernández-Plaza *et al.*, 2013; Monaghan, 1991). Algunas frases claves para identificar esta categoría son: sin nunca tocar dicho valor, siguiendo la regla de que, y no va a ser el resultado, nunca lo llega a pasar o tocar, fin, etc.
Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR)	Los sujetos expresan la posibilidad de alcanzar el límite, pero no de rebasarlo o sobrepasarlo. Usan palabras como no pasar (Cornu, 2002; Fernández-Plaza *et al.*, 2013; Monaghan, 1991). Algunas frases claves para identificar esta categoría son: punto final, valor máximo, hasta donde llega la función, frontera, extremo, fecha límite, etc.
Términos de posición relativa (PR)	Los sujetos usan palabras o frases para el límite que denotan una posición relativa, es decir, aluden a dónde está ubicada una noción matemática con respecto a una noción fija (objeto) de manera explícita o implícita. Algunas palabras claves para identificar esta categoría son: cercano, a la derecha, encima de, mayor que, próximo, por encima, es una proximidad. Esta categoría no necesariamente está relacionada con el LO. Además, si los sujetos evidencian la categoría CLDC entonces señalan la categoría PR, y puede haber PR sin que haya CLDC.
Situaciones (ST)	Los sujetos refieren a situaciones en las que se aplica el límite.

Las respuestas de los estudiantes a la pregunta 4, que correspondían a los términos y modos de uso que brindaban para el límite, las relacionamos con las categorías LO, NA y ANR basándonos en la descripción que brinda la Real Academia Española (RAE) para el límite, quien indica que el límite puede ser una frontera, un fin, un valor extremo o una fecha límite.

A continuación, para ejemplificar la codificación, mostramos las respuestas del estudiante EBM1313 a las preguntas que le hemos realizado en el cuestionario. Al responder a la primera pregunta (figura 1), el estudiante evidencia la categoría Límite como Objeto (LO), ya que indica que el límite es el punto. No obstante, es en la pregunta 2, cuando observamos las categorías: Límite como Proceso (LP) debido que se observa un proceso de aproximación; Coordinación entre las Variables x y y (CV) ya que hay relación de la variable independiente con la variable dependiente a través de procesos de aproximación; Condiciones de Lateralidad y Doble convergencia (CLDC), pues evidencia que por derecha e izquierda el límite debe ser -2; Términos de Posición Relativa (PR) debido a que muestra diferentes preimágenes tanto a la izquierda como a la derecha de 1; y finalmente evidencia la categoría Otra Representación (OR), ya que utiliza una representación tabular (figura 2).

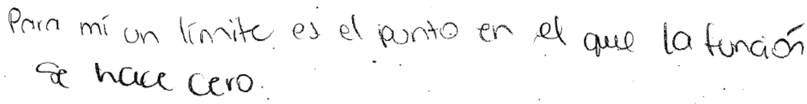


Figura 1. Explicación de la definición de límite (pregunta 1) del estudiante EBM1313.

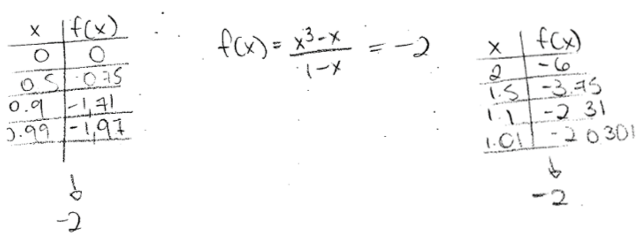


Figura 2. Representación del límite (pregunta 2) del estudiante EBM1313.

Además, anota dos situaciones generales para el límite (figura 3), por lo que evidencia la categoría Situaciones (ST). Por último, asocia el límite con un extremo (figura 4), por lo que evidencia las categorías Límite como Objeto (LO) y Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR).

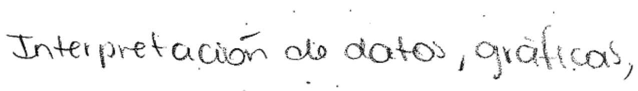


Figura 3. Situación del límite (pregunta 3) que manifiesta el estudiante EBM1313.

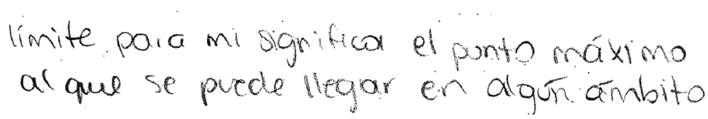

límite para mi significa el punto máximo al que se puede llegar en algún ámbito

Figura 4. Términos y modos de uso del límite (pregunta 4) que manifiesta el estudiante EBM1313.

También presentamos las respuestas del estudiante EBM0309 a las preguntas que le hemos realizado en el cuestionario, para ejemplificar las categorías RV, LI, NA, PM, y RG que no se evidencian en las respuestas del estudiante EBM1313.

Al dar la definición de límite (figura 5), el estudiante EBM0309 evidencia la categoría Referencia a las Variables x y y (RV), pues usa los términos preimagen e imagen, y la categoría Vinculación entre límite e imagen (LI), ya que indica que, esta imagen es el límite. Además, el estudiante habla de una función real de variable real, por lo que evidencia la categoría Propiedades matemáticas (PM). En la figura 6 observamos cómo el estudiante EBM0309 usa el plano cartesiano para representar el límite, por lo que exhibe la categoría Representación gráfica (RG). Finalmente, en la figura 7 vemos que el estudiante dice que se puede usar el límite para definir cuál es el punto al que no se llegará, es decir, nos da evidencias de fin, por lo que entendemos que evidencia las categorías Límite como Objeto (LO) y Aspectos de no alcanzabilidad (NA).

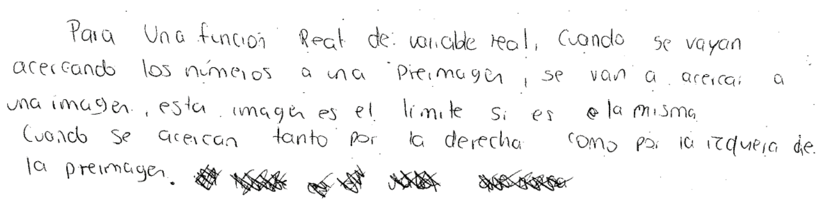

Para Una funcion Real de variable real, Cuando se vayan acercando los números a una Preimagen, se van a acercar a una imagen, esta imagen es el límite si es la misma Cuando se acercan tanto por la derecha como por la izqueira de la preimagen.

Figura 5. Explicación de la definición de límite (pregunta 1) del estudiante EBM0309.

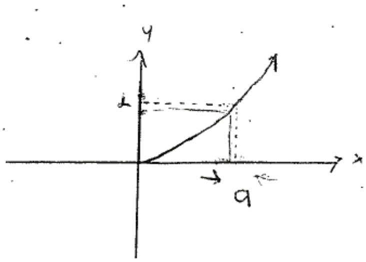


Figura 6. Representación del límite (pregunta 2) del estudiante EBM0309.

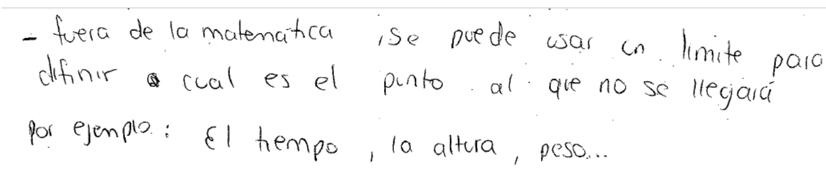

- fuera de la matematica, se puede usar un limite para definir cual es el punto al que no se llegará
por ejemplo: El tiempo, la altura, peso...

Figura 7. Términos y modos de uso del límite (pregunta 4) que manifiesta el estudiante EBM0309.

3.4. Análisis clúster

Por último, nos servimos de un análisis clúster para obtener una vista sintetizada de las concepciones sobre el límite de los participantes mediante la formación de grupos. El análisis clúster o análisis de conglomerados permite organizar los datos en grupos homogéneos basados en conjuntos de variables clasificadas (Härdle y Simar, 2015). En nuestro caso, el análisis de contenido nos dejaba ver algunas similitudes entre las respuestas dadas a cada uno de los sujetos; sin embargo, también nos interesaba determinar similitudes por participante según las respuestas que daban al instrumento de forma conjunta, y así poder identificar perfiles de significado dados al límite.

El análisis de conglomerados se realizó con el software R, versión 4.1.2. (https://www.r-project.org/), un lenguaje de programación multiplataforma basado en software libre diseñado para el análisis estadístico. Aunque nuestro trabajo es cualitativo, este análisis nos permitió agrupar a los participantes por similitudes en las respuestas que no son fáciles de detectar observando los datos. Así que el software resultó ser una herramienta muy útil para este propósito.

El análisis de conglomerados fue jerárquico aglomerativo que se realizó usando una medida de similitud debido a la naturaleza dicotómica de los datos, tomando la de Rogers-Tanimoto, la cual mide la probabilidad de coincidencia entre dos variables, duplicando la ponderación en las no coincidencias. Combinamos esta medida con el método de Ward, que minimiza la suma de los cuadrados de las diferencias entre cada individuo y su centroide dentro de cada grupo (Rencher, 2002).

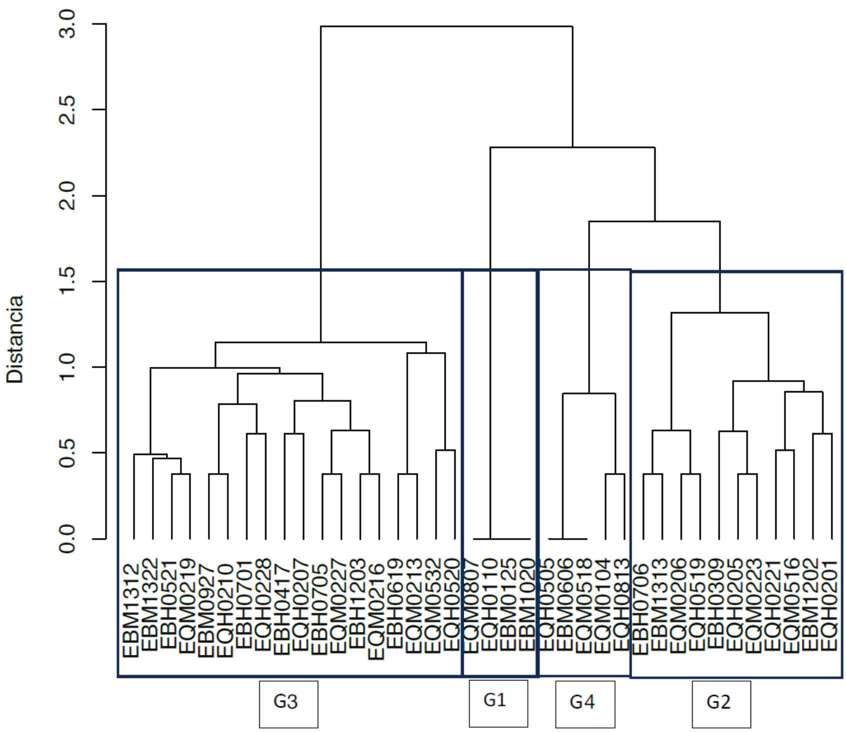


Figura 8. Dendrograma con los 4 conglomerados de los 38 sujetos.

Para poder interpretar de manera apropiada y organizada los grupos, se realizó un corte a una distancia en la que se forman cuatro grupos: G1 corresponde al primer perfil, G2 al segundo perfil, G3 al tercer perfil y G4 corresponde al cuarto perfil. Como investigadores utilizamos un criterio observacional para elegir los 4 grupos, pues consideramos que podían explicar mejor los conglomerados. No hubo un criterio métrico. Como se puede apreciar en la figura 8, en el dendrograma se observa la jerarquía de los grupos. Y se aprecia también qué estudiantes pertenecen a cada grupo o perfil.

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Un primer análisis de los datos manifiesta que las respuestas que los estudiantes proporcionan informan sobre todas las categorías. Por ejemplo, se podría pensar a priori que cuando se pregunta por representaciones esperamos que las respuestas se refieran a representaciones (RG, OR); sin embargo, en las respuestas a la pregunta 2 (representar) proporcionan información en casi todas las categorías, salvo la de referencias a las variables (RV) y las situaciones (ST). En la tabla 2 se puede ver las categorías a las que proporcionan información las diferentes preguntas del cuestionario.

Tabla 2. Asociación empírica de las categorías de análisis en las respuestas a las preguntas

Sistema de categorías	Preguntas del cuestionario			
	1	2	3	4
Límite como objeto (LO)	X	X	---	X
Límite como proceso (LP)	X	X	---	---
Vinculación entre límite e imagen (LI)	X	X	---	---
Coordinación entre las variables x e y (CV)	X	X	---	---
Referencia a las variables x e y (RV)	X	---	---	---
Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)	X	X	---	---
Propiedades matemáticas (PM)	X	X	---	---
Representación gráfica (RG)	---	X	---	---
Otras representaciones (OR)	---	X	---	X
Aspectos de no alcanzabilidad (NA)	X	X	---	X
Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR)	X	X	---	X
Términos de posición relativa (PR)	X	X	---	---
Situaciones (ST)	---	---	X	---

Revisando cada una de las categorías, observamos que para la categoría Límite como objeto (LO), tenemos que la totalidad de los estudiantes manifiestan esta categoría puesto que todas las acepciones recogidas de la pregunta 4 de límite que aparecen en el diccionario de la Real Academia Española (RAE) (frontera, extremo, fin y fecha límite) se interpretaron como LO. No obstante, si eliminamos las respuestas a esta pregunta, sigue manifestándose en 79% de las respuestas. En la pregunta 1, los estudiantes refieren al límite como: número, valor, valores, punto, cero, imagen, el fin, huecos, lugar, etc.; y en la pregunta 2 lo identifican con puntos, huecos, saltos, números en la representación.

La categoría Límite como proceso (LP) se observa en el 95% de las respuestas de los estudiantes. En la pregunta 1, refieren al límite como: aproximarse, tendencia, acercamiento, analizar lo que hay alrededor de un punto, se estudia el alrededor de los puntos, etc.; y en la pregunta 2 lo identifican con flechas, puntos de aproximación, o líneas alrededor de la variable independiente o dependiente tanto de modo general, como en casos particulares en la representación.

La categoría Vinculación entre límite e imagen (LI) se aprecia en 26% de las respuestas de los estudiantes. En la pregunta 1, usan frases como: esta imagen es el límite, las imágenes de a en y tienden a L, es un punto al cual se acerca ubicado en $f(x)$, el valor que pertenece a una función, cuando sustituyo valores en una variable específica, es el valor que toma la y, el límite de $f(x)$ es 4; y en la pregunta 2 realizan asociaciones a través de puntos o con una línea, de una preimagen con su imagen en la representación.

La categoría Coordinación entre las variables x y y (CV) se observa en 39% de las respuestas de los estudiantes. En la pregunta 1, refieren al límite como procesos de aproximación entre la variable independiente y la dependiente, y los relacionan; y en la pregunta 2 lo explicitan en la representación.

Como puede observarse en la figura 9, el estudiante EBM0125 hace una representación para el límite. Podemos ver que hace procesos de aproximación por la izquierda y derecha de a, usa flechas alrededor de L, por lo que evidencia la categoría LP, asocia las preimágenes 1, a y 2 con sus respectivas imágenes, por lo que evidencia la categoría CV, también dibuja un punto lo que evidencia la categoría LO, con este punto que dibuja se deprende que la imagen de a es L, lo que evidencia la categoría LI.

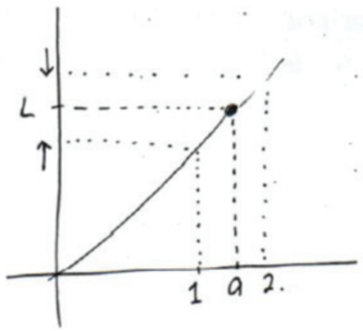


Figura 9. *Representación del límite (pregunta 2) que manifiesta el estudiante EBM0125.*

La categoría Referencia a las variables x y y (RV) se aprecia en el 37% de las respuestas de los estudiantes. En la pregunta 1, refieren al límite como: preimagen, imagen, imágenes, punto en x, punto en y, etc.

La categoría Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC) se observa en el 53% de las respuestas de los estudiantes. En la pregunta 1, usan frases como: si al aproximarse a a por derecha y por izquierda se obtiene el resultado, es el límite si es la misma cuando se acerca tanto por derecha como por izquierda de la preimagen etc.; y en la pregunta 2 realizan en la representación gráfica, flechas o procesos de aproximación alrededor de un mismo número para indicar que por izquierda y derecha el límite debe ser lo mismo. Y en la tabular, se hacen asignaciones de valores cercanos a un mismo número por izquierda y derecha, para verificar que sus imágenes tienden al mismo resultado.

Observamos en la figura 10, como el estudiante EBM0125 menciona las imágenes de a, por lo que evidencia la categoría RV, también, por su explicación de la definición del límite detectamos que evidencia la categoría CLDC.

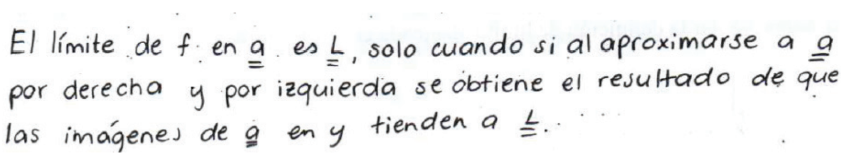
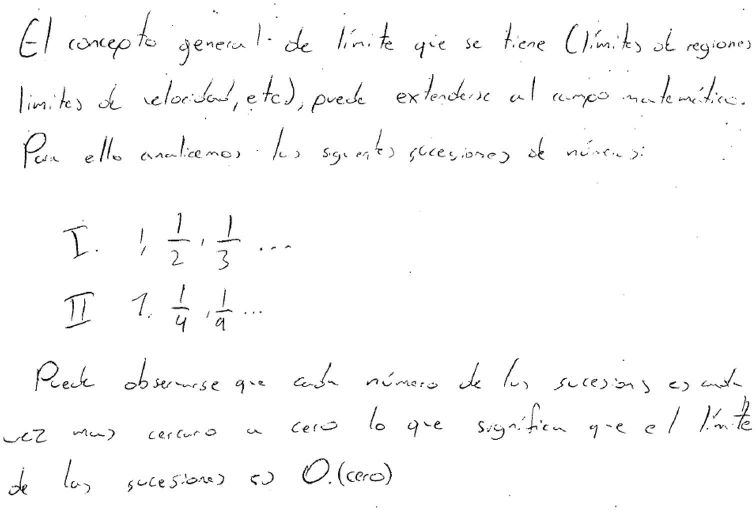

El límite de f en a es L, solo cuando si al aproximarse a a por derecha y por izquierda se obtiene el resultado de que las imágenes de a en y tienden a L.

Figura 10. Explicación de la definición del límite (pregunta 1) que manifiesta el estudiante EBM0125.

La categoría Propiedades matemáticas (PM) se observa en el 18% de las respuestas de los estudiantes. En la pregunta 1, los estudiantes usan frases como: función real de variable real, hay límites infinitos, sucesiones, límite de sucesiones, etc.; y en la pregunta 2 evidencian asíntotas o límites infinitos en la representación. En la figura 11 vemos como el estudiante EQH0207 evidencia esta categoría.


El concepto general de límite que se tiene (límites de regiones límites de velocidad, etc), puede extenderse al campo matemático. Para ello analicemos las siguientes sucesiones de números:

I. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots$

II $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9} \ldots$

Puede observarse que cada número de las sucesiones es cada vez mas cercano a cero lo que significa que el límite de las sucesiones es 0.(cero)

Figura 11. Explicación de la definición del límite (pregunta 1) que manifiesta el estudiante EQH0207.

La categoría Representación gráfica (RG) se aprecia en 87% de las respuestas de los estudiantes. En la pregunta 2 lo explicitan a través de una representación gráfica. Y en el caso de la categoría Otras representaciones (OR) se observa en el 50% de las respuestas de los estudiantes. En la pregunta 2 y en la pregunta 4, lo identifican con representaciones diferentes a las gráficas, como por ejemplo tabulares, verbales, simbólicas y pictóricas. Las figuras 12 y 13 muestran ejemplos de ilustraciones del concepto de límite utilizando una representación gráfica y pictórica, respectivamente.

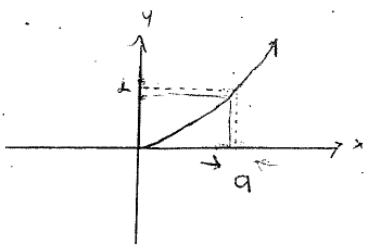


Figura 12. Representación del límite (pregunta 2) del estudiante EBH0309.

El límite se asemeja a una barrera, un punto donde puedo llegar pero ya no puedo avanzar a más de ahí.

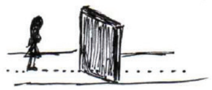


Figura 13. Términos y modos de uso (pregunta 4) que manifiesta el estudiante EBM0125.

La categoría Aspectos de no alcanzabilidad (NA) se aprecia en un 42% de las respuestas de los estudiantes. De las acepciones recogidas de la pregunta 4 de límite que aparecen en el diccionario de la RAE (frontera, extremo, fin y fecha límite) hemos interpretado el fin como NA. No obstante, si eliminamos las respuestas a esta pregunta, sigue manifestándose NA en un 18% de las respuestas. En la pregunta 1, los estudiantes refieren al límite como: el lugar por donde esta no pasa (en la gráfica), se acerca a un punto, pero nunca lo toca, sin que este esté incluido, pero siguiendo la regla de que y no va a ser el resultado, etc., y en la pregunta 2 lo identifican con asíntotas o límites infinitos en la representación. En la figura 15 observamos cómo el estudiante EBM0927 evidencia esta categoría, pues dibuja un límite infinito en la representación gráfica.

La categoría Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad (ANR) se aprecia en el 87% de las respuestas. De las acepciones recogidas de la pregunta 4 de límite que aparecen en el diccionario de la RAE (frontera, extremo, fin y fecha límite) hemos interpretado frontera, extremo, y fecha límite como ANR. No obstante, si eliminamos las respuestas a esta pregunta, sigue manifestándose ANR en el 11% de las respuestas. En la pregunta 1, refieren al límite como: valor máximo, el límite una función es hasta dónde llega la función, solo se le permite acercarse a cierto valor, no pasarse de él y en la pregunta 2 lo identifican con una acotación en la representación. En la figura 14 observamos cómo el estudiante EQM0518 evidencia esta categoría.

límite, es una barrera hasta donde podemos llegar, también una forma de medir nuestras actitudes.

Figura 14. Términos y modos de uso (pregunta 4) que manifiesta el estudiante EQM0518.

La categoría Términos de posición relativa (PR) se observa en el 71% de las respuestas de los estudiantes. En la pregunta 1, destacan frases como: izquierda, derecha, arriba, abajo, cerca de un valor, valor aproximado al punto, por ambos lados se acerca a un valor en el eje x, es una proximidad, etc.; y en la pregunta 2 usan flechas alrededor de un número o símbolo, hacen aproximaciones por izquierda o derecha de un número en la representación. En la figura 15 observamos cómo el estudiante EBM0927 evidencia esta categoría, pues se da varios valores por la izquierda de cero en la representación tabular.

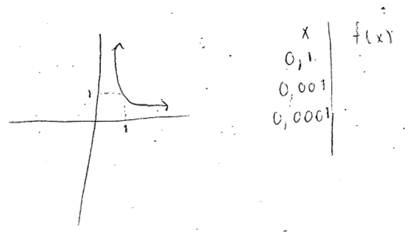


Figura 15. Representación del límite (pregunta 2) del estudiante EBM0927.

La categoría Situaciones (ST) se aprecia en el 34% de las respuestas de los estudiantes. En la pregunta 3, usan frases como: en la industria, en la medicina, en la economía, en gráficas matemáticas, en la convergencia de una función, en el concepto de derivada, en la estadística, en la arquitectura, en la ingeniería, en la astronomía y en la física. En la figura 16 observamos cómo el estudiante EQM0213 evidencia esta categoría, pues indica que el límite se puede usar en estadísticas.

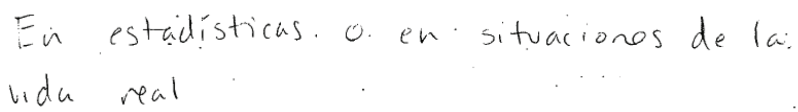


Figura 16. Situación del límite (pregunta 3) que manifiesta el estudiante EQM0213.

En la tabla 3 mostramos a modo de resumen los porcentajes de respuesta de los estudiantes para cada una de las 13 categorías.

Tabla 3. Porcentaje de evidencia de cada categoría con base en las 38 respuestas de los estudiantes

LO	LP	LI	CV	RV	CLDC	PM	RG	OR	NA	ANR	PR	ST
100	95	26	39	37	53	18	87	50	42	87	71	34

Se observa el predominio de los elementos Objeto-Proceso, el primero enfatizado por los aspectos de uso, ya que, en el diccionario de la RAE, todas las acepciones identifican límite como un objeto. Además, se impone la representación gráfica sobre otras representaciones, aunque llama la atención que la mitad de los estudiantes usan imágenes que no tienen coordenadas cartesianas para referirse a límite. Con respecto a la manera de referirse a límite, los estudiantes subrayan los aspectos de la no rebasabilidad y usan términos de posición relativa.

4.1. Análisis de conglomerados

El análisis clúster permitió identificar cuatro grupos. En el primer perfil (figura 17), que solo agrupa al 11% (4 estudiantes), se caracteriza porque los estudiantes manifiestan que el límite es tanto un objeto (LO) como un proceso (LP), relacionan límite con imagen (LI), coordinando las variables (CV), haciendo referencia a ambas (RV) y mencionando condiciones de lateralidad y doble convergencia (CDLC). Para representar el límite usan tanto representaciones gráficas (RG) como otras representaciones (OR). Para estos estudiantes el límite es no rebasable (ANR) y proporcionan expresiones que manifiestan la posicionalidad relativa (PR). Es decir, expresan un significado de límite rico en elementos de estructura conceptual, representación y sentido. Llamaremos a este perfil “Significado Completo”.

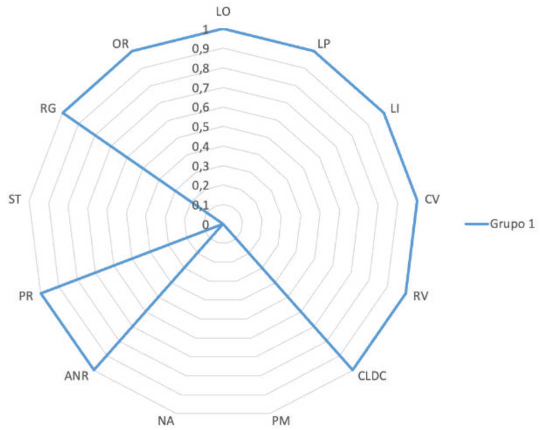


Figura 17. Primer perfil: estudiantes que evidencian un significado completo.

El segundo perfil (figura 18) agrupa al 29% de los estudiantes (11) que manifiestan que el límite es objeto (LO) y proceso (LP), coordinan las variables (CV) y mencionando lateralidad y doble convergencia (CDLC). La representación más usual es la gráfica (RG) y suelen proporcionar expresiones que manifiestan la posicionalidad relativa (PR). El significado que se manifiesta tiene bastantes características, pero le faltan muchas otras. Sobresale con respecto a los otros perfiles el uso de situaciones, por lo que lo denominamos "Significado por ejemplos".

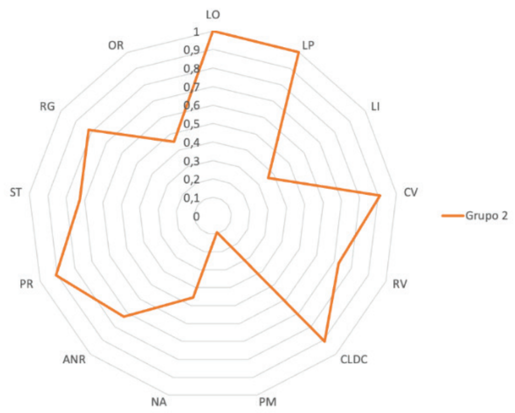


Figura 18. Segundo perfil: estudiantes que evidencian el significado por ejemplos.

El tercer grupo (figura 19), en el que están casi la mitad de los estudiantes (47%, 18 estudiantes), caracteriza el límite con cuatro elementos: es un objeto (LO) y un proceso (LP), que se representa gráficamente (RG) y con la característica de que no es rebasable (ANR). Expresan un significado de límite con poca riqueza de elementos que caracterizan el significado, así que el grupo lo nombramos como “Significado ingenuo”.

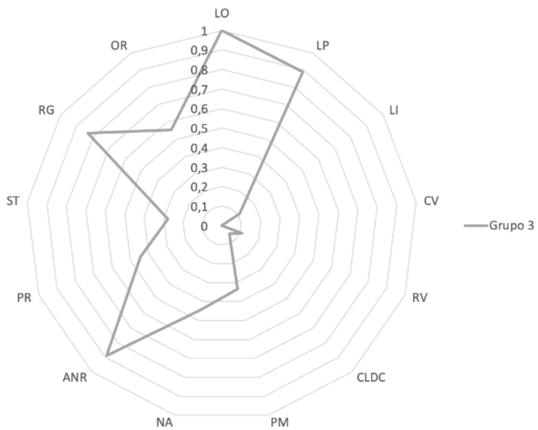


Figura 19. Tercer perfil: estudiantes que evidencian un significado ingenuo.

Finalmente, cinco estudiantes (13%) conforman el cuarto grupo (figura 20), muy parecido al anterior (LO, LP, RG y ANR), pero al que se le añaden condiciones de lateralidad y doble convergencia (CDLC) y de posición relativa (PR). El significado que se manifiesta está basado en el modo de uso del límite y en la representación gráfica, por lo que se denomina “Significado interpretado”.

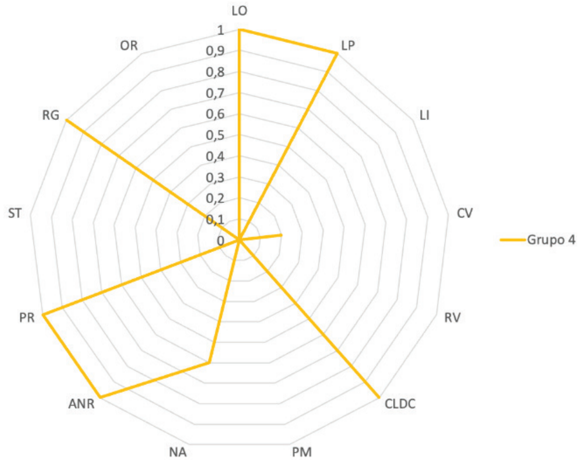


Figura 20. Cuarto perfil: estudiantes que evidencian un significado interpretado

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo del trabajo consistía en analizar y sintetizar los significados manifestados por estudiantes de primer curso universitario sobre el concepto de límite en un punto de una función real de variable real.

Para ello, utilizamos un cuestionario semántico que diseñamos para obtener información sobre aspectos presentes en la definición del límite (pregunta 1), las representaciones (pregunta 2) y los sentidos y modos de uso (preguntas 3 y 4). Además, adaptamos un sistema de categorías basado en resultados clásicos sobre concepciones del límite.

Con respecto a las categorías de organización de respuestas, sabíamos que las 15 categorías mencionadas en González-Flores *et al.* (2021) eran suficientes para analizar las definiciones del concepto de límite, sin embargo, en este trabajo nos basamos en ese sistema de categorías y agregamos las categorías Otra Representación (OR) y Situaciones (ST) para establecer un nuevo sistema de 13 categorías que nos permitiera estudiar el significado del concepto del límite, y no solo las definiciones como lo habíamos hecho antes en González-Flores *et al.* (2021). Este nuevo sistema de 13 categorías, que presentamos, es suficiente para realizar el estudio del significado del concepto de límite, ya que nos permitió organizar la información proporcionada por los estudiantes a través de las preguntas del cuestionario, ya que no hubo información que dichas categorías no pudiesen abarcar.

Se observa en la tabla 3 que las categorías "clásicas", esto es, las categorías que proceden de los estudios clásicos sobre el límite LO, LP y ANR (Cottrill *et al*., 1996; Sfard, 1991; Tall, 1980; Cornu, 2002; Monaghan, 1991) son las que con más frecuencia se detectan en las respuestas de los estudiantes. En el caso de LO y ANR las evidencian más en la respuesta a la pregunta 4. Junto a estas, las representaciones gráficas (RG) ya que se preguntaba específicamente por las representaciones. Además, la categoría OR la evidencian la mitad de los estudiantes en sus respuestas. Y una minoría de estudiantes evidencian las categorías NA, CV, LI, PM, RV y ST en sus respuestas a las preguntas del cuestionario.

Queremos resaltar que la categoría Límite como Objeto (LO) es una categoría que evidencian de forma frecuente los estudiantes en las respuestas a las preguntas sobre la definición (pregunta 1), la representación (pregunta 2) y sobre los términos y modos de uso (pregunta 4), ya que la mayoría de estos, 29 de 38, la evidencian de forma simultánea en al menos dos de las tres respuestas a estas preguntas.

Es peculiar que la categoría Límite como Proceso (LP) no aparece dentro de las definiciones del límite en la RAE y, como era esperable, los estudiantes no la incorporaron como una interpretación. Sin embargo, es la característica que más se detecta en las respuestas a las definiciones de límite y a las representaciones. En cierto sentido, se puede decir que cuando los estudiantes responden a preguntas de matemáticas, el límite casi siempre es considerado un proceso, pero que cuando responden a usos de límite, se ven obligados por el uso del lenguaje a identificarlo como un objeto.

Preguntar por definiciones y representaciones proporciona variedad de categorías de respuestas y, por tanto, son básicas para determinar los significados. Preguntar sobre modos de uso no proporciona tanta variedad de categorías, pero ayuda a completar los significados. Los modos de uso suelen proceder de prácticas cotidianas o conocidas fuera de la matemática, por lo que las características del concepto matemático que expresan son limitadas.

Con respecto a los perfiles de significado, hemos detectado que los significados más completos (perfil 1) los manifiestan pocos estudiantes. En este perfil, además de las necesarias menciones al carácter dual Objeto-Proceso, los estudiantes manifiestan que el límite tiene elementos matemáticos (LI, CV, RV, CLDC), pero sin olvidar que las representaciones pueden ser tanto gráficas como de otros tipos y que se interpreta como algo no rebasable (ANR) y siempre con referencia a posiciones relativas (PR).

El resto de los perfiles expresan significados menos completos (perfiles 2, 3 y 4) bastantes más. Es muy probable que sea debido a que están iniciándose en el estudio del límite y es de esperar que, al terminar su formación, estos significados sean más ricos. Los tres perfiles tienen una base intuitiva o cotidiana que está en línea con los trabajos mencionados en la introducción y que, en muchos casos, es la transmitida por los docentes (Blázquez, 1999, 2000; Fernández-Plaza *et al.*, 2013; Monaghan, 1991; o Williams, 1991). La justificación puede estar en que el límite es un concepto matemático, pero a su vez es una palabra que suele usarse en la semántica cotidiana, con una connotación más de objeto que de proceso o procedimiento, entonces puede ser que lo anterior se esté manifestando en el sentido del límite que manifiestan los estudiantes. Esto concuerda con la idea de Planas *et al.* (2018), que indica que el lenguaje adquiere un significado central en la construcción del pensamiento y conocimiento matemático.

El estudio, que se ha realizado de manera inicial con pocos estudiantes, se va a ampliar a casi 300 estudiantes de la Universidad Nacional de Costa Rica, donde esperamos establecer unos perfiles que confirmen nuestras conclusiones y que nos permitan superar la limitación del escaso número de sujetos estudiados.

5.1. Recomendaciones metodológicas

Planteamos algunas sugerencias metodológicas que pueden contribuir a que los estudiantes enriquezcan sus significados sobre el concepto de límite. Partimos de la premisa de que el proceso de aprendizaje es una construcción socialmente mediada (Ausubel *et al.*, 1976), y que el proceso de enseñanza-aprendizaje parte desde el conocimiento previo (Bruner, 1990; Piaget y García, 1991).

En primer lugar, recomendamos detectar las ideas, concepciones y conocimientos previos que tienen los estudiantes. Una vez detectadas estas ideas, ya sea en los perfiles mostrados o en otros, debemos complementar o enriquecer el significado que tienen los estudiantes. En términos de Tall y Vinner (1981), el docente debe generar oportunidades para que el estudiante evolucione desde el concepto imagen al concepto definición.

En general, podemos decir que cuando haya que enriquecer significados en términos conceptuales (variables Límite como objeto, Límite como proceso, Vinculación entre límite e imagen, Coordinación entre las variables x y y, Referencia a las variables x y y, Condiciones de lateralidad y doble convergencia, Propiedades matemáticas) se pueden proponer tareas de índole conceptual y procedimental que promuevan la reflexión mediante la interpretación del límite en situaciones apropiadas: tareas de continuidad usando límites laterales.

Para enriquecer los aspectos de representación (variables Representación gráfica y Otra representación), proponemos plantear tanto tareas donde se necesite interpretar y manipular en un solo sistema de representación como tareas en las que los estudiantes deban realizar una conversión entre distintos sistemas de representación (Janvier, 1987).

Cuando se pretenda enriquecer el significado del límite desde la naturaleza del modo de uso o sentido (variables Aspectos de no alcanzabilidad, Aspectos de alcanzabilidad y no rebasabilidad, Términos de posición relativa y Situaciones), sugerimos tareas donde se requiera interpretar el límite en un contexto en particular, así como tareas que incluyan problemas de modelización.

En general, el uso de la visualización y de múltiples sistemas de representación favorecen el aprendizaje del concepto de límite (Tall y Vinner 1981) y se debe conseguir una buena manipulación procedimental que permita consolidar conocimiento conceptual (Sfard, 1991). Además, no debemos olvidar que la competencia matemática no puede prescindir de la contextualización, por lo que se requieren situaciones contextualizadas para ser matematizadas e interpretadas.

REFERENCIAS

Ausubel, D. P., Novak, J. D., y Hanesian, H. (1976). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo* (Vol. 3). Trillas.

Bell, A.W., Costello, J. y Küchemann, D. E. (1983). *A review of research in mathematical education: research on learning and teaching.* The NFER-NELSON Publishing Company Ltd.

Blázquez, S. (1999). Sobre la noción del límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. En T. Ortega (Ed.), *Investigación en Educación Matemática III* (pp. 167-184). SEIEM.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valladolid.

Blázquez, S. y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula, 10,* 119-135. https://gredos.usal.es/bitstream/handle/10366/69322/Rupturas_en_la_comprension_del_concepto_.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Bruner, J. (1990). *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva*. Alianza.
Byerley, C. y Thompson, P. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *Journal of Mathematical Behavior, 48,* 168-193. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.003
Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Horsori.
Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education* (8th ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539
Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167- 192. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90015-2
Cornu, B. (2002). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* (pp. 153–166). https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10
Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA*, *7*(3), 117-130.
Fernández-Plaza, J. A. (2016). Análisis del contenido. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 103-118). Ediciones Pirámide.
González-Flores, Y., Montoro-Medina A. B. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2021). Análisis de las definiciones de límite que brindan estudiantes universitarios. *UNICIENCIA, 35*(2), 1-20. http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.18
Frege, G. (1998). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de Semántica y Lógica* (pp. 84-111). Tecnos.
Härdle, W., y Simar, L. (2015). *Applied multivariate statistical analysis* (4th ed.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-45171-7
Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: The case of Mathematics* (pp. 1-28). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
Jacques, A., y Viol, J. (2020). Uma Experiência de Ensino por meio do Uso de Tarefas: limites e possibilidades para a aprendizagem de Matemática em um contexto universitário. *Acta Scientiae, 22*(2), 67-85. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5411
Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning mathematics* (pp. 27-32). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1987). Representations Systems and Mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Lawrence Erlbaum Associated.

Kidron, I. (2014). Calculus teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education.* (pp. 69-75). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_18

Kidron, I., y Tall, D. (2014). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics, 88,* 183–199. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9567-x

Kilpatrick, J., Hoyles, C. y Skovsmose, O. (Eds.). (2005). Meanings of meaning of mathematics. *En Meaning in Mathematics Education* (pp. 9-16). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24040-3_2

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology* (Second Edition). publications.

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de Las Ciencias, 34*(3), 51-71. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1871

Matthewson, L. (2004). On the methodology of semantic fieldwork. *International Journal of American Linguistics, 70* (4), pp. 369-415. https://doi.org/10.1086/429207

MECD, Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillertao. *Boletín Oficial del Estado, 3*. Gobierno de España.

Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of Mathematics, 11*(3), 20-24. https://flm-journal.org/Articles/3905D8E2472320B3602153840B1E86.pdf

Planas, N., Morgan, C., y Schütte, M. (2018). Mathematics education and language. Lessons from two decades of research. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, y K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 196–210). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315113562-15

Piaget, J. y García, R. (1991). *Toward a logic of meaning* (P. Davidson y J. Easley, Eds.). Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Rencher, A. C. (2002). *Methods of Multivariable Analysis*. John Wiley and Sons.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Horsori.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 39-63. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.4

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 33,* 11–27. http://funes.uniandes.edu.co/15988/1/Rico2013El.pdf

Rico, L. (2016a). Matemática y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 85–100). Ediciones Pirámide.

Rico, L. (2016b). Significados de los contenidos matemáticos. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 153–174). Ediciones Pirámide.

Rico, L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). Ideas to Work for the Curriculum Change in School Mathematics. En Y. Shimizu y R. Vital (Eds.), *ICMI Study 24 Conference proceedings. School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities* (pp. 301-308). ICMI.

Ruiz-Hidalgo, J. (2016). Sentido y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 139-151). Ediciones Pirámide.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies of Mathematics, 22*(1), 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sierra, M., González, M. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(1), 71-85.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics, 32*(1), 49-92. https://doi.org/10.1023/A:1002919830949

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 133-162. https://doi.org/10.1007/s10649-006-5892-z

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike, *The Journal of Mathematical Behavior, 7*(4), 765-790. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.01.001

Tall D. O. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 170-176). PME.

Tall, D., y Katz, M. (2014). A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit, and infinitesimal, with implications for teaching the calculus.

Educational Studies in Mathematics, 86(1), 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9531-9

Tall, D y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151- 169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Thompson, P. (2013). In the absence of meaning.... En K. Leatham (Ed.), *Vital directions for research in mathematics education* (pp. 57-93). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6977-3_4

Thompson, P. (2016). Researching mathematical meanings for teaching. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 435-461). Taylor and Francis.

Thompson, P. y Milner, F. (2019). Teachers' Meanings for Function and Function Notation in South Korea and the United States. En H. G. Weigand, W. McCallum, M. Menghini, M. Neubrand y G. Schubring (Eds.), *The Legacy of Felix Klein* (pp. 55-66). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99386-7_4

Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development, 52,* 83-94. https://doi.org/10.1159/000202727

Vergnaud, G. (2013). Conceptual development and learning. *Revista Curriculum, 26,* 39-59. https://qurriculum.webs.ull.es/0_materiales/articulos/Qurriculum%2026/Qurriculum%2026-2013(3).pdf

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for research in Mathematics Education, 22*(3), 219-236. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.22.3.0219

Autor de correspondencia).

Juan Francisco Ruiz Hidalgo

Dirección: Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Campus de Cartuja, s/n.
Universidad de Granada
18071 Granada (España)
jfruiz@ugr.es

ANEXOS

	LO	LI	LP	CV	RV	NA	ANR	PR	CLDC	PM	RG	OR	ST	GRUPO
EBM0125	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	G1
EBM1020	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	G1
EQH0110	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	G1
EQM0807	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	G1
EBH0309	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	G2
EBH0706	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	G2
EBM1202	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	G2
EBM1313	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	G2
EQH0221	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	G2
EQH0201	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	G2
EQH0205	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	G2
EQM0206	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	G2
EQM0223	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	G2
EQM0516	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	G2
EQH0519	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	G2
EBH0417	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	G3
EBH0521	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	G3
EBH0619	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	G3
EBM1322	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	G3
EBH0701	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	G3
EBH0705	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	G3
EBM0927	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	G3
EBH1203	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	G3
EBM1312	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	G3
EQM0219	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	G3
EQH0210	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	G3
EQH0207	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	G3
EQM0216	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	G3
EQM0227	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	G3
EQH0228	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	G3
EQM0213	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	G3
EQM0532	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	G3
EQH0520	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	G3
EBM0606	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	G4
EQM0104	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	G4
EQM0518	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	G4
EQH0505	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	G4
EQH0813	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	G4

 https://doi.org/10.24844/EM3603.10

Educación inclusiva: propuesta didáctica STEAM integrada para alumnado de Educación Primaria centrada en el aprendizaje de las figuras planas

Inclusive education: an integrated STEAM teaching proposal for primary school students focused on learning plane figures

Alicia Moreno Badás,[1] Eva M. García-Terceño[2]

Resumen: En este artículo se presenta una propuesta didáctica basada en investigaciones previas sobre educación inclusiva, didáctica de la matemática y educación STEAM integrada, en la que los saberes propios de las cinco disciplinas que componen el acrónimo (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Artes y Matemática), se integran para dar respuesta a una situación-problema: la construcción de la maqueta de un parque de atracciones geométrico. La matemática adopta un papel dominante sobre el resto de las áreas de conocimiento, cuyo planteamiento didáctico trata de superar los abordajes memorísticos y descontextualizados de la geometría, basados en la clasificación y medición aislada de figuras. En este proceso se apuesta por la variabilidad de experiencias de aprendizaje en las que se prioriza la incorporación de actividades basadas en la participación del alumnado a través de la manipulación, la experimentación, el diálogo y la interacción interpersonal y con el entorno. Las actividades que integran esta propuesta son susceptibles de acoger alternativas multinivel que faciliten personalizar el aprendizaje al ajustarse a los ritmos, capacidades y potencialidades del alumnado.

Fecha de recepción: 21 de septiembre de 2023. **Fecha de aceptación:** 15 de octubre de 2024.

[1] Facultad de Educación, Departamento de Didácticas Específicas, Universidad de Burgos, aliciamorenobadas@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-4631-0058.

[2] Facultad de Educación, Departamento de Didácticas Específicas, Universidad de Burgos, emgterceno@ubu.es, https://orcid.org/0000-0003-4631-0058.

Palabras clave: *Propuesta didáctica, educación inclusiva, educación STEAM integrada, geometría, educación primaria.*

Abstract: This article presents a didactic proposal based on previous research on inclusive education, didactics of mathematics and integrated STEAM education, in which the knowledge of the five disciplines that constitute the acronym (Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics) are integrated to respond to a situation-problem: the creation of a geometric amusement park model. Mathematics assumes a dominant role over the rest of the areas of knowledge, whose didactic approach tries to overcome the memorised and decontextualised ways of teaching Geometry, based on the classification and isolated measurement of figures. In this process, the focus is on the variability of learning experiences in which the incorporation of activities based on the active participation of students through manipulation, experimentation, dialogue and interpersonal and environmental interaction is the main priority. The activities that make up this proposal are likely to include multilevel alternatives that facilitate personalised learning by adjusting to the pace, abilities and potential of the students.

Keywords: *Teaching proposal, inclusive education, integrated STEAM education, Geometry, Primary Education.*

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años, los enfoques educativos integrados han ido recuperando el prestigio e interés del que disfrutaron durante décadas (Lenoir y Hasni, 2016; Ortega-Sánchez, 2022). La aproximación fragmentada al mundo natural y social desde disciplinas aisladas y descontextualizadas está dejando paso a un abordaje más permeable entre áreas de conocimiento, con el objetivo de mostrar y acercarse a la realidad desde una visión más humanista y realista (Morales y Muñoz, 2021). Este abordaje del proceso de enseñanza-aprendizaje fue ya defendido por teóricos en el campo de la educación como John Dewey, Ralph Tyler o Benjamin Bloom por su positiva influencia en la educación de los jóvenes para la vida democrática.

Desde la escuela, esta reorientación en la forma de percibir, entender e interactuar con el mundo puede concebirse como un proceso natural e inevitable en un contexto educativo en el que a nivel internacional se apuesta por el desarrollo competencial e integral de todo el alumnado (UNESCO, 2016). Su objetivo: formar a una ciudadanía comprometida, capaz de movilizar sus conocimientos, destrezas y actitudes para identificar, observar, analizar, comprender y afrontar los principales retos y desafíos personales, locales y globales a los que nos enfrentamos como individuos y como sociedad (en España, esto aparece reflejado en la Ley Orgánica 3/2020), los cuales parecen difícilmente abordables desde la “fragmentación del conocimiento en asignaturas” (Feito-Alonso, 2010, p. 67).

La interdisciplinaridad en la escuela es entendida como el medio para lograr una integración real de los procesos de aprendizaje y de los saberes. No relega ni infravalora aquellos que son propios de cada una de las disciplinas, sino que trata de reforzar su significatividad a través de su conexión con los saberes de otras disciplinas (Lenoir, 2013). Esta interrelación busca contextualizar el proceso de enseñanza-aprendizaje, facilitar la transferencia del conocimiento generado a nuevas situaciones e involucrar de manera activa, responsable y comprometida al alumnado con su aprendizaje y realidad (Perera-Cumerma, 2009). La concreción de este proceso se realiza a través de situaciones de aprendizaje que implican la resolución de un problema, la comprensión de un fenómeno, la creación de un producto o el planteamiento de nuevas preguntas, desde las que se abordan las dimensiones del saber, del saber hacer y del saber ser.

En los últimos años, una de las propuestas más exploradas busca difuminar las líneas que enclaustran y jerarquizan el conocimiento en disciplinas, al integrar los saberes propios de las áreas curriculares de Ciencias Naturales, Tecnología y Matemática, así como aquellos saberes propios de la Ingeniería (English *et al.*, 2017; Martín–Páez *et al.*, 2019; Toma y Greca, 2018). Este enfoque, conocido popularmente por el acrónimo STEM, se enriquece y se completa con la integración de las Artes (A) al conferir al proceso de aprendizaje una visión humanista de la ciencia (Connor *et al.*, 2015), la cual se contextualiza a través de disciplinas como la sociología, la psicología, la historia o la filosofía (Zeidler, 2016).

La aplicación práctica de los modelos integrados que cumpla con todos los requerimientos descritos solo puede concretarse en el aula con metodologías activas, participativas y cooperativas (Elizondo, 2021) como el Aprendizaje Basado en Proyectos, la Indagación Científica y el Diseño de Ingeniería, entre otras (Greca y Ortega-Sánchez, 2022). Su naturaleza flexible, centrada en el alumnado y capaz de generar un aprendizaje dialógico, autónomo e interactivo (Elizondo,

2021) permite diseñar una amplia gama de experiencias (Guðjónsdóttir y Óskarsdóttir, 2016) para ofrecer un aprendizaje personalizado que se acomode a la singularidad de cada discente: a sus conocimientos, experiencias, capacidades, intereses y potencialidades (Coll *et al.*, 2020).

Desde esta perspectiva, las acciones educativas se alejan de la exclusiva búsqueda de adaptaciones individuales. El objetivo no es *encajar* a determinados discentes en un contexto preestablecido, rígido e inalterable, sino centrarse en la identificación de aquellos cambios en el currículum, en los métodos de enseñanza, en las formas de agrupar al alumnado y en los procedimientos de evaluación que faciliten su participación en la misma experiencia educativa (Ainscow, 2020), sin pretender que aprendan lo mismo, a la misma velocidad, ni utilizando las mismas estrategias (Wolfe *et al.*, 2013, citado en Guðjónsdóttir y Óskarsdóttir, 2016).

La personalización del aprendizaje, favorecida por medio de la integración del conocimiento y el uso de metodologías activas, se considera una de las piedras angulares de la educación inclusiva (Coll *et al.*, 2020; Elizondo, 2020). Desde comienzos de los años noventa, este modelo respetuoso con la diversidad (UNESCO, 1990, 1994) busca eliminar las barreras culturales relacionadas con las creencias, las actitudes o las interacciones; las barreras políticas, legislativas y normativas; así como las barreras prácticas de accesibilidad y didáctica (Covarrubias-Pizarro, 2019). Todo ello, con el propósito de favorecer la presencia, la participación y el progreso de todo el alumnado, pero especialmente de aquel que se encuentra en mayor riesgo de exclusión y/o bajo rendimiento (Ainscow, 2005).

No existe un único camino hacia la inclusión, sino diversidad de alternativas sujetas a un contexto concreto y dinámico: es la escuela la que debe estar abierta al cambio y adaptarse a las características del alumnado con la implicación de toda la comunidad educativa (Ainscow, 1999). Sin embargo, a pesar de que los planteamientos y bases teóricas del modelo educativo inclusivo están afianzados, la puesta en práctica de acciones concretas en los centros educativos aún precisa de un mayor impulso (Muntaner-Guasp *et al.*, 2022). Por ello, con el objetivo de contribuir a la promoción de espacios inclusivos de aprendizaje, el presente artículo, basado en la idea planteada en el trabajo fin de grado realizado por la primera autora de este artículo, muestra una propuesta didáctica en la que se aborda un contenido específico de la matemática, las figuras planas, dentro de una propuesta STEAM integrada.

MARCO TEÓRICO PARA EL DISEÑO DE LA PROPUESTA

La propuesta didáctica que aquí se presenta se ha diseñado siguiendo el modelo teórico-metodológico propuesto por García-Terceño y Greca (2022) para el fomento del aprendizaje de las ciencias experimentales en espacios educativos inclusivos a partir de una integración interdisciplinar de contenido curricular (figura 1). Este modelo sigue la estela de la propuesta de una educación STEAM integrada para el desarrollo competencial del alumnado presentada por Ortiz-Revilla *et al.* (2021), cuya estructura se basa en el modelo reticular para la construcción del conocimiento científico propuesto por Larry Laudan (1984). Como se observa en la figura 1, los objetivos establecidos y las teorías y metodologías seleccionadas para su consecución se interrelacionan de manera no jerárquica entre sí, lo que posibilita su continua reevaluación y modificación con la finalidad de adaptarlo a cada contexto y seguir avanzando en la mejora de un sistema educativo de calidad para todo el estudiantado.

El propósito central de esta triada es promover espacios de aprendizaje de la ciencia inclusivos, que den una respuesta educativa satisfactoria a la diversidad de perfiles que componen un aula. Para ello, se apuesta por aplicar los principios del Diseño Universal de Aprendizaje, que provean al alumnado de variadas alternativas para acercarse y comprender el conocimiento, expresarse y comprometerse con el proceso de aprendizaje (CAST, 2011). La materialización de estos principios se realiza a través del uso de metodologías activas como el Diseño de Ingeniería (Greca y Ortega-Sánchez, 2022) y de la incorporación del Aprendizaje Cooperativo (Johnson y Johnson, 1999) por su naturaleza dinámica, interactiva y dialógica.

Por último, la red incluye tres teorías que permiten justificar el uso de los métodos presentados a nivel epistemológico, psicológico y didáctico. En primer lugar, se presenta el Modelo de la Resolución de Problemas de Laudan (1977), el cual ofrece un enfoque valioso para la enseñanza de las ciencias en las aulas de primaria, ya que permite estructurar el aprendizaje científico en torno a la capacidad del alumnado para identificar y resolver problemas, más allá de simplemente memorizar hechos y teorías. En este caso, una situación problematizadora enmarcada en un Diseño de Ingeniería. En segundo lugar, se incorpora la Teoría Sociocultural de Vygotski, la cual defiende la interacción proactiva del niño y la niña con su entorno a través del diálogo para favorecer los procesos de aprendizaje. En tercer lugar, desde una perspectiva didáctica, se incorpora la Teoría de la Variación (Marton y Booth, 1997), en la que el aprendizaje se entiende como un proceso en el que el alumnado desarrolla la capacidad para discernir los aspectos críticos que definen al objeto de aprendizaje (un fenómeno, una habilidad o un conocimiento específico), de aquellos que son circunstanciales. De tal forma, que cuanto más variadas sean las situaciones en las que el alumnado pueda experimentar con el objeto de aprendizaje, más significativa y profunda será su comprensión.

Además del examen minucioso del objeto de aprendizaje, las ideas previas del alumnado permiten ajustar las situaciones a sus necesidades. La Teoría de la Variación entiende que el objeto de aprendizaje es dinámico y, por lo tanto, debe ser monitorizado durante todo el proceso para garantizar que aquello que se pretende enseñar (objeto de aprendizaje previsto) coincide con las estrategias y acciones didácticas implementadas en el aula (objeto de aprendizaje presentado) y, finalmente, con aquello que aprende el alumnado (objeto de aprendizaje vivido).

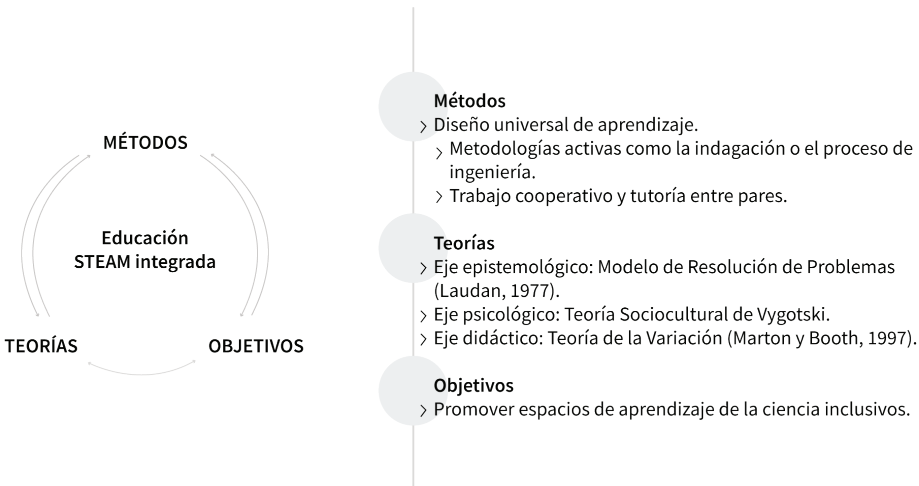


Figura 1. Modelo triádico para una educación inclusiva de la ciencia basada en la integración interdisciplinar de contenido curricular.

CONTENIDO MATEMÁTICO DE LA PROPUESTA

La integración de los saberes propios de la STEAM en esta propuesta didáctica, se materializa en torno a una situación problemática, cercana y potencialmente interesante para estudiantes de entre diez y once años: la construcción de la maqueta de un parque de atracciones geométrico.

Para dar respuesta a esta situación, la propuesta aborda diversos contenidos del área de la matemática, las ciencias de la naturaleza y la educación artística: plástica, recogidos en el currículum de Educación Primaria de la Comunidad de Castilla y León (España), vigente durante el diseño de la propuesta (Decreto 26/2016). Asimismo, aunque no estén contemplados dentro del currículum de forma explícita, la propuesta también incorpora saberes propios del campo de la tecnología y de la ingeniería (figura 2).

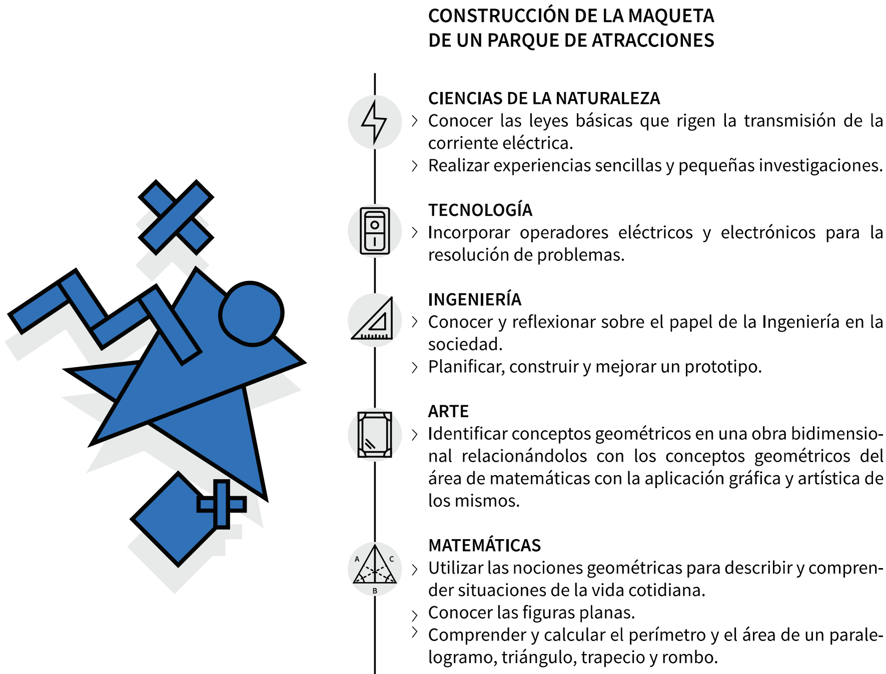


Figura 2. Contenidos curriculares y no curriculares trabajados en la propuesta didáctica.

De las disciplinas que se integran en esta propuesta, la matemática adopta un papel dominante sobre el resto (Li y Schoenfeld, 2019). Las figuras planas, contenido perteneciente al campo de la geometría, son el punto de partida y sobre ellas recae el mayor peso de la propuesta. Esta decisión responde a la necesidad de recuperar la importancia del aprendizaje de la geometría desde las aulas de educación primaria (Alsina, 2019), ya que se trata de un aprendizaje que "estimula las habilidades cognitivas básicas, permite el desarrollo de formas específicas de pensamiento matemático y contribuye en gran medida a la comprensión del mundo en el que vivimos (Bauersfeld, 1992; Franke & Reinhold, 2016)" (Kuzle, 2022, p. 1).

Esta escasa atención didáctica a la geometría, puede estar relacionada con los bajos niveles de comprensión que muestra el alumnado sobre conceptos geométricos básicos en España (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2019) y con unas ideas previas, en ocasiones no científicas, que es preciso identificar. Para Ausubel (1978), este conocimiento es el factor clave sobre el que diseñar las acciones didácticas para que el aprendizaje generado sea significativo. Por ello, como fase inicial y previa al diseño de la propuesta didáctica, se han recuperado de la literatura algunas de las ideas previas, no científicas, más comunes. Una vez que comience la implementación, dichas ideas deben ser completadas y ajustadas con aquellas del grupo destinatario de la propuesta. Entre ellas, destaca la dificultad del alumnado para:

- Identificar y clasificar las figuras planas cuando se muestran en una posición no prototípica (Bernabeu y Llinares, 2017) (figura 3); así como cuando presentan un parecido holístico (Guncaga *et al.*, 2017) (figura 4).
- Comprender la relación entre el perímetro y el área de un polígono, ya que en ocasiones se asume que ambos conceptos están directamente correlacionados y que uno determina al otro (Rangel y Murcia, 2017).

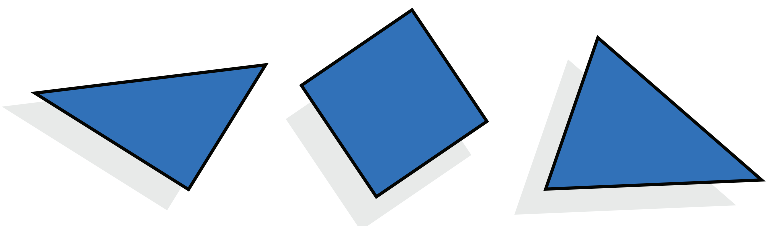


Figura 3. Ejemplo de figuras en posiciones no prototípicas.

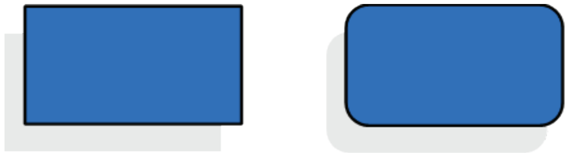


Figura 4. Ejemplo de figuras con parecido holístico.

De la tradición de una enseñanza de la geometría centrada en la identificación y clasificación mediante la observación pasiva y la memorización (Sinclair y Bruce, 2015), las figuras planas poligonales tienden a ser presentadas de forma prototípica, aislada y en una única posición en el espacio, con el objetivo de simplificar al alumnado su identificación por medio de alguna de sus características definitorias (Bernabeu, 2022). Por ejemplo, el cuadrado se presenta sobre una de sus bases, lo que facilita observar los ángulos rectos que lo componen; el triángulo isósceles sobre el lado desigual que lo caracteriza, y el triángulo rectángulo con su ángulo recto en la parte inferior.

Sin embargo, esta limitada oferta de posibilidades en las que percibir el objeto de aprendizaje supone un obstáculo didáctico que dificulta al alumnado encontrar conexiones entre distintas representaciones de una misma figura y tomar conciencia de las características que las definen (Dindyal, 2015). A este respecto, la Teoría de la Variación defiende la necesidad de ofrecer al alumnado variedad de experiencias en las que percibir el objeto de aprendizaje, con el propósito de contrastar de forma simultánea aquellos aspectos críticos que lo definen, de aquellos que varían.

Algo similar ocurre en el proceso de enseñanza de los conceptos de perímetro y área. Su abordaje suele presentarse de forma consecutiva e independiente, asociada al uso de fórmulas (Liñán-García *et al.*, 2021), lo que impide comprender la relación que existe entre ambos.

Por estas razones, en los últimos años, los esfuerzos docentes y de la investigación se concentran en la reorientación didáctica de la geometría por medio de la manipulación, la simulación, la comparación física y mental de las figuras, el trazado y la orientación que fomenten el razonamiento y faciliten una posterior comprensión y resolución de problemas geométricos (Alsina, 2019; Soto-Varela y de Vicente-Guijarro, 2023).

Una vez comprendida la naturaleza de muchas de las ideas no científicas sostenidas por parte del alumnado, se definen los objetivos matemáticos de aprendizaje que justifican el diseño de las actividades y de las estrategias didácticas empleadas. Aunque su reformulación debe hacerse efectiva si estas no contribuyen a su transformación o si surgen nuevas:

- Identificar y clasificar figuras planas por medio del análisis de sus propiedades.
- Medir el perímetro de una figura y su área a través del uso de la cuadrícula y la regla.
- Comprender que, al aumentar el perímetro de las figuras el área no aumenta en la misma proporción.
- Descomponer las figuras en otras más sencillas para hallar su área.

El abordaje de estos objetivos se plantea con el uso del Diseño de Ingeniería como metodología que vertebra y cohesiona todas las disciplinas integradas en la propuesta, las cuales se tratan a través de actividades flexibles y variadas (Marton y Booth, 1997), susceptibles de ser ajustadas a las características del alumnado y del contexto (CAST, 2011). En su fase de investigación se profundiza en conceptos/ideas centrales abordados en la propuesta para, posteriormente, aplicarlos a la resolución de problemas, con el objetivo de favorecer su aprendizaje, tal y como plantea, a nivel epistemológico, el modelo de Laudan. Por su parte, el Aprendizaje Cooperativo (Johnson y Johnson, 1999) se emplea como medio para estimular el diálogo y la interacción interpersonal positiva que contribuya al desarrollo cognitivo y social del alumnado (Vygotski, 1978).

CONCRECIÓN DE LA PROPUESTA

Las actividades que se presentan a continuación (figura 5) han sido diseñadas con el objetivo de contribuir a la promoción de espacios de aprendizaje en los que un grupo diverso de discentes tenga la oportunidad de acceder al conocimiento, expresarse, interactuar a nivel social y con el entorno, así como de comprometerse con el proceso de aprendizaje personal y grupal. Junto a la descripción de las actividades o integradas en ella, se incluyen breves reflexiones sobre hipotéticas posibilidades de modificación para dar respuesta a diversas situaciones con las que nos podemos encontrar en el aula.

DESCUBRIENDO LAS FIGURAS PLANAS

A|M

- Arte y geometría. Kandinsky
- La geometría de la calle. Recorrido fotográfico

DISEÑO DE INGENIERÍA

S|T|E|A|M

Fase inicial
- Presentación
- Objetivos, saberes y habilidades

S|A|M

Proceso de investigación
- Figuras planas. Polígonos y figuras curvas
- Los triángulos
- Los cuadriláteros
- Perímetro y área
- Los circuitos eléctricos

S|T|E|A|M

Reflexión y planificación

S|T|E|A|M

Creación y mejora del prototipo

S|T|E|A|M

Comunicación del proceso y resultados

***S**: Ciencia* | ***T**: Tecnología* | ***E**: Ingeniería* | ***A**: Arte* | ***M**: Matemáticas*

Figura 5. Propuesta de actividades.

Descubriendo las figuras planas

Actividad 1.1. Arte y geometría. Kandinsky

En esta primera actividad, saberes propios de la matemática y de las artes se integran a través de un conocido pintor ruso: V. V. Kandinsky (1866-1944), quien utilizó el color y las formas geométricas como forma de expresión. Más allá del reconocimiento de las figuras que integran la obra, esta actividad permite adentrarse en el mundo de la pintura y reconocerla como medio para desarrollar la expresión verbal y emocional.

Las obras seleccionadas para esta tarea se describen y analizan con base en las dos fases propuestas por Roser Gómez, especialista en educación visual y plástica (Edo, 2005). En la primera fase, se describen de manera objetiva los elementos reconocibles: colores, figuras, manchas, líneas, etc. y se encomienda al alumnado comparar y agrupar dichos elementos en función de alguna de sus características, por ejemplo: figuras cerradas y abiertas; figuras cóncavas y convexas; líneas curvas y rectas; líneas paralelas y secantes. Este proceso brinda una buena oportunidad para conocer y comprender qué aspectos críticos definen a las figuras planas y cuáles no. En la segunda fase (evocación creativa de posibles significados de la obra) se realiza un análisis subjetivo en el que se anima al alumnado a expresar aquello que siente o rememora al percibir cada cuadro.

Tras el proceso de análisis, cada discente elige un título justificado para la obra y se especula sobre las causas que llevaron al autor a escoger el suyo. Para finalizar la actividad, se invita al alumnado a crear un cuadro inspirado en las obras trabajadas (figura 6).

Opciones didácticas. El análisis didáctico de obras de arte tiene un marcado carácter visual, lo que presumiblemente va a ocasionar una barrera para la participación activa y el aprendizaje del alumnado ciego y con baja visión. Por ello, es necesario ofrecer alternativas como imprimir con relieves o con incisiones las obras con las que se va a trabajar, de tal forma que el alumnado pueda diferenciar las diferentes partes que la componen.

Por su parte, la creación de nuevas obras también es susceptible de ajustarse a cada discente al posibilitar el uso de diferentes técnicas (dibujo, collage o grabado) y materiales (compases, reglas, escuadras y cartabones, piezas, sellos o pegatinas con diferentes texturas, formas y colores, etc.).

Figura 6. Obras creadas por un aula de 5º de educación primaria tras poner en práctica esta actividad.

Actividad 1.2. La geometría de la calle

El entorno cercano es una fuente de conocimiento que ofrece muchas posibilidades didácticas y motivacionales. Si nos fijamos, las fachadas, el mobiliario urbano o las puertas de los edificios esconden una maravillosa combinación de figuras que, en muchas ocasiones, pasan desapercibidas a nuestros sentidos. La segunda actividad propone al alumnado un paseo consciente de camino a casa o una experiencia detectivesca en el mercado del barrio para descubrir y fotografiar las figuras planas camufladas en estos espacios. Las imágenes se comparten digitalmente y deben ir acompañadas de una pequeña descripción de la figura y del lugar donde fue descubierta.

Opciones didácticas. El contexto familiar del alumnado puede dificultar que esta actividad sea desarrollada fuera del horario lectivo. Como alternativa, esta actividad puede ser realizada con el grupo clase en el centro escolar y/o en sus inmediaciones.

Diseño de ingeniería. Primeros pasos

Presentación

En esta primera aproximación a la metodología del Diseño de Ingeniería, se crea un espacio de diálogo en el que el alumnado pueda compartir sus ideas, experiencias y conocimientos sobre el papel de la ingeniería en la sociedad. Para asegurar que las aportaciones de todo el alumnado son escuchadas, cada discente, de manera individual, completa las siguientes frases:

- *Los ingenieros e ingenieras son personas que...*
- *La ingeniería mejora la vida de la gente porque...*
- *La ingeniería contribuye al cuidado del medioambiente porque...*

Una vez recogidas las ideas personales, estas se comparten con el resto de integrantes del pequeño grupo y se crea una lista única con las diferentes aportaciones recopiladas. Posteriormente, cada grupo comparte dicha lista con la clase en un intercambio de ideas que sirve de contexto al docente para introducir las fases que guían el proceso del Diseño de Ingeniería.

Objetivos, saberes y habilidades

El Diseño de Ingeniería planteado se basa en la construcción de la maqueta de una feria compuesta por diferentes atracciones, elementos decorativos y mobiliario con diseños geométricos, móviles y/o sonoros. Para alcanzar este objetivo es preciso movilizar diferentes saberes y habilidades que requieren ser identificados. Con la técnica cooperativa *1, 2, 4*, (extraída de Pujolás, 2008), el alumnado de manera individual anota sus ideas y, posteriormente, se ponen en común por parejas. La lista conjunta resultante de este intercambio de opiniones es debatida dentro del grupo cooperativo para, finalmente, crear una única lista común a toda la clase. Con ayuda docente, los saberes y habilidades identificados se completan, ajustan y agrupan por disciplinas.

Diseño de Ingeniería. Proceso de investigación

A continuación, se presenta la fase de investigación, en la que se abordan aquellos saberes y habilidades que se precisan de manera previa al diseño y construcción de la maqueta. Para ello, se plantean las siguientes actividades:

Figuras planas. En esta actividad se recuperan las fotografías de la *actividad 1.2*. Con ellas, el alumnado, de forma justificada, agrupa en dos categorías diferentes las figuras planas y los contraejemplos *¿Qué características definen a todas las figuras de la primera categoría en comparación con la segunda?*

A continuación, las figuras planas se subdividen en función del tipo de líneas, rectas o curvas que las componen. *¿Qué tienen en común todas las figuras, llamadas polígonos, que se encuentran en el primer grupo?* (lados, vértices, ángulos interiores y diagonales) *¿Qué las diferencia del segundo grupo, las denominadas figuras curvas?* Finalmente, se anima al alumnado a crear un modelo que represente y categorice a todos los polígonos encontrados según su número de lados.

Opciones didácticas. Las alternativas para realizar estos modelos pueden variar. Por ejemplo, algún discente puede conseguir el modelo tras seleccionar el adecuado entre una variedad de figuras o construirlo con fichas digitales o de madera. También se puede contemplar la posibilidad de su representación sobre un geoplano, virtual o físico o a través del dibujo, ya sea sobre una plantilla, una cuadrícula o un lienzo en blanco con herramientas de dibujo como reglas o compases.

El triángulo. La clave de esta actividad, basada en la propuesta de González (2017), es el uso de segmentos de diferentes medidas (2, 4, 8 y 10 cm) que permitan al alumnado una fácil construcción y manipulación de los triángulos. Tras unos minutos de pruebas, se lanzan algunas preguntas: *¿Habéis encontrado alguna dificultad para crear los triángulos? ¿Qué pasa cuando utilizamos los segmentos de 2, 4 y 10 cm? ¿Qué otras opciones tampoco permiten construir un triángulo?* Guiados por el docente, el alumnado reflexiona y argumenta sobre la relación que debe darse entre sus lados para asegurar la construcción de un triángulo.

A continuación, el alumnado crea nuevos triángulos bajo diferentes premisas:

- Triángulos con todos los lados iguales.
- Triángulos con dos lados iguales.
- Triángulos con todos los lados desiguales.

– Una vez clasificados los ejemplos, cada grupo de triángulos se cataloga con su nombre científico y se analizan los ángulos que los componen, *¿recordáis cómo se llaman los diferentes tipos de ángulos? ¿Cuáles de estos triángulos tienen un ángulo recto? ¿A qué grupo pertenecen?* A continuación, se busca que el alumnado construya mentalmente representaciones de diferentes triángulos: *¿se puede construir un triángulo con dos ángulos rectos?, ¿y obtusos? ¿Hay algún grupo que no tenga ningún triángulo con ángulos rectos?* Las hipótesis establecidas se comprueban *a posteriori* con la manipulación física de los triángulos.

Para finalizar, se trabaja con la relación entre las dos clasificaciones: la longitud de los lados y el tipo de ángulos, a través de la construcción de nuevos triángulos, del diálogo y de la argumentación.

Los cuadriláteros. Esta actividad se plantea sobre la base de la propuesta de Blanco-Nieto *et al.* (2015) en la que se plantean cuatro fases (tabla 1):

Tabla 1. Actividades propuestas para abordar el aprendizaje de los cuadriláteros.

FASE 1. Construcción de figuras con triángulos

- Descomposición de un cuadrado en 4 triángulos.
- Creación de figuras con 2, 3 y 4 de los triángulos extraídos del cuadrado.
- Dibujo de las siluetas creadas.

FASE 2. Identificación y creación de figuras de 4 lados

- Selección y análisis de las figuras creadas con 4 lados.
- Creación de nuevas figuras y dibujo de sus siluetas.

FASE 3. Análisis de figuras con 4 lados. Paralelogramos

- Guiados por las preguntas planteadas por el docente, el alumnado agrupa las figuras y las nombra: Rombos, cuadrados, rectángulos y romboides.
- ¿Qué tienen en común todas estas figuras? ¿Podríais dibujar otros paralelogramos diferentes?

FASE 4. Creación y análisis de figuras con 4 lados. Trapecios y trapezoides

- Guiados por las preguntas planteadas por el docente, el alumnado agrupa las figuras y las nombra: Trapecios y trapezoides.
- ¿Podríais dibujar otros trapecios y trapezoides?
- ¿Cómo son sus lados y sus ángulos? ¿Hay algún patrón?

Representaciones geométricas (figura 7). Con el uso de un geoplano virtual, el alumnado representa con figuras geométricas elementos que pueden encontrarse en una feria. Las opciones son múltiples. Por ejemplo, pueden apoyarse en una imagen real o en un dibujo esquemático o transferir una imagen al geoplano utilizando coordenadas. Una vez creadas las representaciones explican al resto de compañeros qué figuras han utilizado y sus características, así como el porqué de la selección escogida y las posibles alternativas.

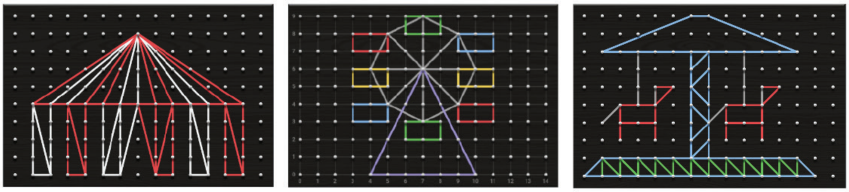
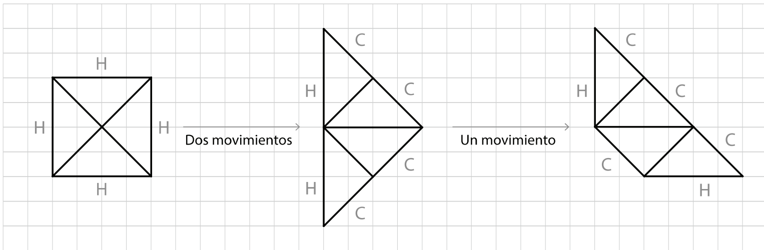


Figura 7. Figuras de creación propia con un geoplano virtual y de libre acceso (The Math Learning Center, 2020).

El perímetro y el área. Para trabajar la relación que existe entre ambos conceptos se emplea la propuesta presentada por Badillo y Edo (2008) basada en la composición y descomposición de figuras. A partir de un cuadrado dividido en cuatro triángulos rectángulos isósceles, se produce una secuencia progresiva de movimientos que dan como resultado un magnífico escenario para comprender cómo se relacionan el perímetro, la superficie y la forma de una figura (figura 8). A continuación, el docente guía al alumnado para deducir a partir de estos ejemplos la fórmula para calcular el área de los paralelogramos y, posteriormente, el de los triángulos.



- **Cuadrado**
- Perímetro=
  H+H+H+H= 4H

- **Triángulo rectángulo isósceles**
- Perímetro=
  H+H+C+C+C+C= 2H+4C
- La forma y el perímetro han cambiado, sin embargo, la superficie permanece constante.

- **Trapecio**
- Perímetro=
  H+C+H+C+C+C= 2H+4C
- La forma ha cambiado, sin embargo, el perímetro y la superficie permanecen constantes.

Figura 8. Ejemplo de actividad para abordar los conceptos de perímetro y área. (Badillo y Edo, 2008).

Los circuitos eléctricos. Para finalizar la fase de investigación, se plantea una experiencia indagatoria sobre los principios y elementos que definen a un circuito eléctrico. La propuesta didáctica busca que el alumnado verifique a través de la experimentación, las hipótesis que han generado sobre el funcionamiento de una bombilla, un motor o un zumbador. *¿Qué elementos necesitamos para crear un circuito eléctrico? ¿De todos los materiales que tenemos (conductores y no conductores) cuáles podríamos utilizar? ¿Por qué en tu circuito una bombilla luce más que la otra?*

Este proceso requiere de momentos destinados al debate, a la argumentación y a la comunicación de ideas, resultados y conclusiones en los que el docente emplea analogías, apoya al alumnado para relacionar conceptos, integra ejemplos cotidianos y parafrasea las explicaciones del alumnado con la terminología científica apropiada al grupo.

Opciones didácticas. La metodología de la Indagación Científica debe ponerse en práctica sin perder de vista al alumnado y sus experiencias previas de aprendizaje. Un proceso didáctico muy estructurado y guiado es más apropiado que uno abierto si nuestro alumnado es inexperto en el aprendizaje por indagación (Martin-Hansen, 2002). El uso de listas de verificación, estructuras gramaticales para comunicar conclusiones, cuadernos de campo, secuencias de acción o mapas conceptuales son algunos ejemplos de posibles apoyos a integrar en el proceso.

Para la construcción de un circuito eléctrico las alternativas multinivel varían, desde el uso de un número mínimo de elementos hasta la integración de una placa microcontroladora para activar o desactivar la corriente eléctrica.

Diseño de Ingeniería. Reflexión y planificación

El conocimiento generado durante las sesiones previas se vuelca en la planificación del diseño de un parque de atracciones, el cual estará compuesto por los prototipos creados por cada uno de los grupos (norias y tiovivos en los que se integran motores para que tengan movimiento, farolas que iluminen el espacio, puestos de venta con luces en los rótulos, etc.), asignados tras un proceso conjunto de selección. Las propuestas generadas durante el desarrollo de una asamblea son sometidas a una criba en la que se analiza su viabilidad en cuanto a los recursos materiales y temporales disponibles, así como a las competencias propias del alumnado.

Una vez que cada grupo tiene asignado el prototipo que va a construir, para facilitar la comprensión del proceso de planificación, se puede hacer uso de hojas de instrucciones para el montaje de muebles que ayuden a identificar los pasos a seguir. Con estos ejemplos, se crea una plantilla similar para guiar al alumnado en la definición de su propio prototipo: *¿Qué vais a construir? ¿Cuál es su función? ¿Qué piezas incluye? ¿Cómo se integran las figuras planas en el diseño? ¿Qué dimensiones tienen? ¿Qué materiales necesitáis? ¿Cómo es el circuito eléctrico?*

Esta es una fase para tomar decisiones y cerrar acuerdos, lo que puede suponer un gran reto para el alumnado. Por ello, es importante crear de manera conjunta una lista de normas para favorecer la escucha y respetar las aportaciones y tiempos de palabra. En los espacios de trabajo dentro del grupo cooperativo, la función del docente es supervisar el proceso e intervenir en aquellas ocasiones en las que sea necesario prestar una ayuda y ofrecer estrategias para resolver conflictos interpersonales y cuestiones propias de la tarea (Johnson y Johnson, 1999).

Diseño de Ingeniería. Creación y mejora del prototipo

Una vez finalizado el proceso de planificación, cada grupo procede a la construcción del primer prototipo el cual una vez finalizado, es evaluado por el resto de grupos, quienes identifican los puntos fuertes y aquellas opciones de mejora que podrían introducirse. Toda la clase de forma conjunta valora la idoneidad de dichas mejoras y el grupo correspondiente aplica aquellas seleccionadas.

En esta fase, la función del docente se centra en guiar al alumnado para utilizar los materiales, las herramientas y las técnicas más apropiadas que les permita obtener un primer prototipo y para garantizar la participación de todo el alumnado en el proceso.

Diseño de Ingeniería. Comunicación del proceso y resultados

Para finalizar, cada grupo presenta su prototipo y el proceso seguido para su construcción desde una perspectiva objetiva y subjetiva (tabla 2).

Tabla 2. Ejemplo de actividad para trabajar la comunicación.

ANÁLISIS OBJETIVO

- Pasos realizados durante el proceso.
- Figuras planas integradas en el prototipo: características y relación entre ellas.
- Dimensiones de las figuras planas poligonales: perímetro y área.
- Circuitos eléctricos: elementos y funcionamiento.

ANÁLISIS SUBJETIVO

- Dificultades encontradas y soluciones aplicadas.
- Conflictos dentro del grupo de trabajo y estrategias utilizadas para solventarlos.
- Sentimientos negativos identificados en uno mismo y en el resto de integrantes: razón y estrategias para mitigarlos.
- Sentimientos positivos identificados en uno mismo y en el resto de integrantes: razón y formas de expresarlos.

CONCLUSIONES

Una educación de calidad para todo el alumnado está supeditada a la coordinación y coherencia de las decisiones y acciones tomadas desde todos los niveles del sistema educativo. Sin embargo, tal y como apunta Ainscow *et al.* (1998/2001), las políticas educativas y los resultados de la investigación defendidos como garantes del avance en la democratización de la educación deben conectar 'con la comprensión de la realidad docente' (p. 22).

La presentación de propuestas didácticas en las que se integra la normativa y se aplican las bases teóricas de diferentes modelos educativos y las estrategias didácticas identificadas como eficaces desde la investigación pueden contribuir a reducir la distancia entre la teoría y la realidad práctica de las aulas. Estas propuestas deben entenderse como ejemplos abiertos y flexibles, en los que la experiencia y el conocimiento teórico, organizativo y de gestión de los docentes sirva para ajustar el proceso de enseñanza a un grupo y contexto específicos.

La propuesta didáctica que se presenta en este trabajo trata de dibujar un posible escenario en el que todos los niños y niñas de un aula puedan acceder, participar y progresar juntos. Este objetivo se justifica con un diseño basado en la integración de saberes y en el consecuente uso de metodologías activas (Elizondo, 2021). Todo ello, sin perder de vista la diversidad del aula y la necesaria incorporación de estrategias, experiencias y oportunidades de aprendizaje variadas que posibiliten un aprendizaje competencial y personalizado (Coll *et al.,* 2020).

Sin embargo, a pesar de la necesidad de contar con propuestas didácticas de estas características, es preciso también el desarrollo de estudios que evalúen la viabilidad de su puesta en práctica en contextos reales, así como el impacto que tienen en el desarrollo competencial del alumnado en espacios educativos inclusivos, con el objetivo de pulir y reforzar el modelo propuesto. Para ello, es necesario colaborar con docentes en procesos de reflexión activa, tal y como proponen Marton *et al.* (2004) en tres fases: (1) antes de la puesta en marcha de la propuesta; (2) durante el proceso de implementación, y (3) una vez que el proceso ha finalizado, con los objetivos de adaptar y ajustar la propuesta al contexto y al alumnado, monitorizar el proceso de enseñanza-aprendizaje y reajustar las metas, las estrategias didácticas y/o actividades en caso de que fuese necesario para alcanzar un aprendizaje significativo y, por último, valorar la coherencia entre el proceso de enseñanza y de aprendizaje.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se basa en la idea de un proyecto desarrollado por la primera autora de este artículo como parte de su trabajo fin de grado y su desarrollo se enmarca en un proyecto de tesis doctoral financiado por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades de España. Ref. FPU19/04717.

REFERENCIAS

Ainscow, M. (1999). *Understanding the development of inclusive schools*. Falmer Press.

Ainscow, M. (2005). Understanding the development of inclusive education system. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 3*(7), 5-20.

Ainscow, M. (2020). Inclusion and equity in education: making sense of global challenges. *Prospects, 49*, 123-134. https://doi.org/10.1007/s11125-020-09506-w

Ainscow, M., Beresford, A., Harris, A., Hopkins, D. y West, M. (1998/2001). *Crear condiciones para la mejora del trabajo en el aula: Manual para la formación del profesorado.* Narcea.

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas de 6 a 12 años.* Graò.

Ausubel, D. P. (1978). In defense of advance organizers: A reply to the critics. *Review of Educational Research, 48*(2), 251-257.

Badillo, E. y Edo, M. (2008). Orientaciones didácticas para el taller del Arte y Geometría III: líneas, polígonos y otras figuras planas. *Educación primaria. Orientación y recursos. Desarrollo curricular. Experiencias*, 1-58.

Bernabeu, M. (2022). "Tips" para la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 110*, 113-128.

Bernabeu, M. y Llinares, S. (2017). Comprensión de las figuras geométricas en niños de 6-9 años. *Educación Matemática, 29*(2), 9-35. https://doi.org/10.24844/EM2902.01

Blanco-Nieto, L., Caballero-Carrasco, A., Cárdenas-Lizarazo, J. y Gómez del Amo, R. (2015). *Aprender a enseñar Geometría en primaria. Una experiencia en formación inicial de maestros*. Universidad de Extremadura.

CAST (2011). *Universal design for learning guidelines version 2.0.* Wakefield, MA: Author.

Coll, C., Esteban-Guitart, M. y Iglesias-Vidal, E. (2020). *Aprendizaje con sentido y valor personal, experiencias, recursos y estrategias de personalización educativa*. Graó.

Connor, A. M., Karmokar, S. y Whittington, C. (2015). From STEM to STEAM: Strategies for enhancing Engineering & Technology education. *International Journal of Engineering Pedagogies, 5*(2), 37-47. https://doi.org/10.3991/ijep.v5i2.4458

Covarrubias-Pizarro, P. (2019). Barreras para el aprendizaje y la participación: Una propuesta para su clasificación. En J. Trujillo-Holguín, A. Ríos-Castillo, y J. García-Leos (coords.), *Desarrollo profesional docente: reflexiones de maestros en servicio en el escenario de la Nueva Escuela Mexicana* (pp. 135-157). Escuela Normal Superior Prof. José E. Medrano.

Decreto 26/2016, de 21 de julio, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León. *Boletín Oficial de Castilla y León*. Valladolid, 25 de junio de 2016, núm. 142, pp. 34184-34746.

Dindyal, J. (2015). Geometry in the early years: A commentary. *ZDM Mathematics Education, 47*, 519-529. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0700-9

Edo, M. (2005). Matemática y Arte en la Educación Infantil, a partir del cuadro “Bailando por miedo” de Paul Klee. En D. Couso, E. Badillo, A. Adúriz-Bravo, y G. Perafán (eds.), *Unidades didácticas en Ciencias y Matemáticas* (pp. 93-126). Cooperativo Editorial Magisterio.

Elizondo, C. (2020). *Ámbitos para el aprendizaje: una propuesta interdisciplinar*. Ediciones Octaedro.

Elizondo, C. (2021). Educación inclusiva y justicia social. *Fórum Aragón – Revista digital de FEAE-Aragón sobre organización y gestión educativa*, (32), 31-34.

English, L. D., King, D. y Smeed, J. (2017). Advancing integrated STEM learning through engineering design: Sixth–grade students’ design and construction of earthquake resistant buildings. *Journal of Educational Research, 110*(3), 255-271. https://doi.org/10.1080/00220671.2016.1264053

Feito-Alonso, R. (2010). De las competencias básicas al currículum integrado. *Revista Qurriculum, 23*, 55-79.

García-Terceño, E. M. y Greca, I. (2022). Diseño de un modelo teórico-metodológico para una educación inclusiva de la ciencia. En K. Gajardo-Espinoza, y J. Cáceres-Iglesias (eds.), *Soñar grande es soñar juntas. En busca de una educación crítica e inclusiva* (pp. 311-327). Octaedro.

González, A. (2017). *Yo tengo tres lados, ¿y vos?: Las figuras geométricas en la escuela primaria*. Homo Sapiens Ediciones.

Greca, I. y Ortega-Sánchez, D. (2022). Metodologías didácticas STEM para la ciudadanía. En D. Ortega-Sánchez, I. Greca, y M. P. Alonso-Abad (coords.), *La ciencia en el arte* (pp. 57-76). Octaedro.

Guðjónsdóttir, H. y Óskarsdóttir, E. (2016). Inclusive education, pedagogy and practice. En S. Markic, y S. Abels (eds.), *Science education towards inclusion* (pp. 7-22). Nova.

Guncaga, J., Tkacik, Š. y Žilková, K. (2017). Understanding of selected geometric concepts by pupils of pre-primary and primary level education. *European Journal of Contemporary Education, 6*(3), 497-515. https://doi.org/10.13187/ejced.2017.3.497

Johnson, D. W. y Johnson, R. T. (1999). What makes cooperative learning work. En D. Kluge, S. McGuire, D. Johnson, y R. Johnson (eds.), *Cooperative Learning. JALT Applied Materials* (pp. 23-36). Japan Association for Language Teaching.

Kuzle, A. (2022). The teaching of geometry in primary education: Is Geometry still neglected in school mathematics? *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*. Bolzano: HAL science ouverte.

Laudan, L. (1977). *Progress and its problems*. University of California Press.

Laudan, L. (1984). *Science and values: The aims of science and their role in scientific debate*. University of California Press.

Lenoir, Y. (2013). Interdisciplinariedad en educación: Una síntesis de sus especificidades y actualización. *Interdisciplina, 1*(1), 51-86. https://doi.org/10.22201/ceiich.24485705e.2013.1.46514

Lenoir, Y. y Hasni, A. (2016). Interdisciplinarity in primary and secondary school: Issues and perspectives. *Creative Education, 7*(16), 2433-2458. https://doi.org/10.4236/ce.2016.716233

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial de España*. Madrid, 30 de diciembre de 2020, núm. 340, pp. 122868-122953.

Li, Y. y Schoenfeld, A. H. (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as "given" in STEM education. *International Journal of STEM Education, 6*(1), 1-13. https://doi.org/10.1186/s40594-019-0197-9

Liñán-García, M., Muñoz-Catalán, M., Contreras, L. y Barrera-Castarnado, V. (2021). Specialised knowledge for teaching Geometry in a primary education class: Analysis from the knowledge mobilized by a teacher and the knowledge evoked in the researcher. *Mathematics, 9*(21), 1-18. https://doi.org/10.3390/math9212805

Martin-Hansen, L. (2002). Defining inquiry. *The science teacher, 69*(2), 34-37.

Martín–Páez, T., Aguilera, D., Perales–Palacios, F. J. y Vílchez–González, J. M. (2019). What are we talking about when we talk about STEM education? A review of literature. *Science Education, 103*(4), 799-822. https://doi.org/10.1002/sce.21522

Marton, F. y Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Lawrence Erlbaum.

Marton, F., Runesson, U. y Tsui, A. B. M. (2004). The space of learning. En F. Marton y A. B. M. Tsui (eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 3-40). Routledge

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2019). *TIMSS 2019.Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias. Informe Español*. https://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/timss/timss-2019.html

Morales, B. y Muñoz, C. (2021). *Handbook of interdisciplinarity.* (ANID/FONDAP/15110009). Center for Climate and Resilience Research (CR)2. https://www.cr2.cl/manual-de-interdisciplina-cr2

Muntaner-Guasp, J. J., Mut-Amengual, B. y Pinya-Medina, C. (2022). Las metodologías activas para la implementación de la educación inclusiva. *Revista Electrónica Educare, 26*(2), 85-105. https://doi.org/10.15359/ree.26-2.5

Ortega-Sánchez, D. (2022). *Controversial Issues and Social Problems for an Integrated Disciplinary Teachin*g. Springer.

Ortiz-Revilla, J., Greca, I. y Arriassecq, I. (2021). A theoretical framework for integrated STEM education. *Science and Education, 31*(2), 383-404. https://doi.org/10.1007/s11191-021-00242-x

Perera-Cumerma, F. (2009). Proceso de enseñanza-aprendizaje. Interdisciplinariedad o integración. *Varona*, (48-49), 43-49.

Pujolàs, P. (2008). *Nueve ideas clave. El aprendizaje Cooperativo*. Graó.

Rangel, M. y Murcia, S. (2017). Concepciones de estudiantes de educación básica sobre perímetro y área. *Eco Matemático, 8*(1), 71-80. https://doi.org/10.22463/17948231.1478

Sinclair, N. y Bruce, C. (2015). New opportunities in Geometry education at the primary school. *ZDM. Mathematics Education, 47*, 319-329. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0693-4

Soto-Varela, R. y de Vicente-Guijarro, J. (2023). La Geometría en mundos inmersivos: Una experiencia educativa. En Hinojo-Cirre, L., Roy-Sadradin, D., y Berral-Ortiz, B. (eds.), *Investigación educativa e innovación docente desde una perspectiva internacional* (pp. 129-138). Dykinson

The Math Learning Center. (10 de Abril de 2020). *Geoplano virtual*. https://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/ecoescuela/recursosdigitales/2020/04/10/geoplano-virtual/

Toma, R. B. y Greca, I. (2018). The effect of integrative STEM instruction on elementary students' attitudes toward science. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(4), 1383-1395. https://doi.org/10.29333/ejmste/83676

UNESCO (1990). *World declaration on education for all: meeting basic learning needs.* https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291

UNESCO (1994). *The Salamanca statement and framework for action on special needs education.* https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000098427

UNESCO. (2016). Education 2030: Incheon declaration and framework for action for the implementation of Sustainable Development Goal 4. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000245656

Vygotski, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge University Press.

Zeidler, D. (2016). STEM education: A deficit framework for the twenty first century? A sociocultural socioscientific response. *Cultural Studies of Science Education, 11*(1), 11-26. https://doi.org/10.1007/s11422-014-9578-z

Autora de correspondencia:
Eva M. García Terceño
Dirección: Departamento de Didácticas Específicas, Facultad de Educación,
Universidad de Burgos, C/Villadiego, 1, 09001 Burgos, España
emgterceno@ubu.es

 https://doi.org/10.24844/EM3603.11

En torno a la publicación del libro de Juan Díaz Godino: *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*

Bruno D'Amore[1]

PREMISA

Tuve la suerte de recibir este libro antes de su publicación oficial y definitiva, cuando mi amigo Juan [Diaz Godino], lo envió a algunos investigadores que a lo largo de los años habían contribuido al desarrollo de su creación científica, el Enfoque Ontosemiótico (EOS). Leído con atención y apreciado por su alcance, a pesar de su tamaño, lo recibí nuevamente después de meses, publicado en forma definitiva, elegante y rica. Basta leer el índice para comprender que nos enfrentamos a una obra de gran impacto cultural; lo que se confirma leyendo cada página con atención.

Juan pertenece al pequeño grupo de quienes han sabido crear teorías significativas, profundas y de gran alcance, como reorientar la investigación en nuestro campo, el de la Educación Matemática, por vías nuevas, potentes, con una visión que abre numerosos frentes. Recuerdo haber tenido un papel importante tanto en dar a conocer la *Teoría de las situaciones* de Guy Brousseau (hace varias décadas, al menos 5), así como en la promoción del estudio teórico y concreto de la *Teoría*

[1] Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. NRD, Departamento de Matematica, Università di Bologna, Italia, bruno.damore@unibo.it, orcid.org.0000-0002-5834-9438

de la objetivación de Luis Radford, al menos durante 25 años, creando oportunidades de comparación teórica y difusión, por ejemplo, invitando a Luis a Italia al congreso anual dirigido por mí desde 1986 y a Suiza (promoviendo un famoso encuentro de discusión entre él y Brousseau, que duró horas).

Ahora, en este 2024, creo que podemos decir que hay más de veinte teorías importantes relativas a la Educación Matemática, aquellas de las cuales tiene sentido hablar; sugerí a mis mejores alumnos dedicarse a la tarea de presentarlas al público de jóvenes investigadores, ya que me doy cuenta de que las nuevas teorías tienden a hacer olvidar las antiguas (Asenova *et al.*, 2022).

La colaboración con Juan siempre ha sido profunda y rica; empezando hace décadas... ya no recuerdo cuándo... Pero en 2006, cuando Luis Radford y yo fuimos editores de un número especial de la revista Relime (México), decidimos mutuamente pedirle a Juan uno de los artículos (Radford y D'Amore, 2006).

En 2005 tuve la oportunidad de quedarme en Granada con Martha Isabel Fandiño Pinilla, invitados por Juan y Carmen Batanero, para una serie de actividades de interés común; pero había habido un encuentro notable unos años antes en Chivilcoy (Argentina), en 2003, durante el cual Martha y yo habíamos favorecido un intercambio oral de opiniones teóricas entre Guy y Juan; por ejemplo, durante un largo viaje en autobús, los dos se habían enfrentado a nivel teórico y mi papel como traductor no había sido sencillo (Brousseau hablaba español, sí, pero no siempre de forma totalmente comprensible). [Hay que decir que, antes de la pandemia del Covid-19, se producían verdaderos encuentros, con viajes, hoteles, comidas compartidas, formidables oportunidades de intercambio personal; lo cual ahora es muy raro, cada vez más raro. Muchas veces Juan vino a Bogotá a trabajar junto a nosotros, por ejemplo, con motivo de exámenes finales de doctorado, aprovechando para intercambiar ideas, realizar seminarios y preparar textos].

A partir de los años 2000, con Juan y en ocasiones con otros autores, entre ellos Vicenç Font y Martha, escribimos diversos artículos destinados a profundizar el análisis crítico del poder de la teoría o a darla a conocer a estudiosos de otros países; esta actividad duró varios años y nunca terminó. Para esto fueron necesarias reuniones en profundidad, entre las que recuerdo la de Santiago de Compostela (2006), trabajando allí los cuatro autores como expertos en ocasión de tesis doctorales.

Hablando de tesis de PhD, con motivo de la discusión del trabajo de uno de mis mejores estudiantes de doctorado, George Richard Paul Santi, en marzo de 2010 invité a Juan y Luis a ser jueces en Palermo (Italia) y fue una oportunidad fantástica para discusión y análisis en profundidad. Así como la conferencia en Santa Marta (Colombia), organizada por la Universidad Sabana de Chía, con motivo de la cual se publicaron documentos significativos para los cuales pedimos una contribución a Juan y a otros amigos (por ejemplo: Brousseau, Arzarello, Cantoral, Duval, Font, Godino, Llinares, ...).

Otras oportunidades de contacto en congresos fueron varias veces en Luján (Argentina, por ejemplo, en 2021); en Bolonia con motivo de una conferencia internacional celebrada en mi honor en 2011 (Sbaragli, 2011); una conferencia virtual en Granada en 2017, en la que Martha y yo presentamos un análisis en profundidad de algunos aspectos de EOS que parecen haber sido tenidos en cuenta en este último libro de Juan; y otros. Muchos de los trabajos de Juan sobre EOS han sido traducidos al italiano por nosotros, ya que la teoría EOS estaba luchando por ganarse la entrada entre los investigadores de ese país. Y finalmente recuerdo un libro escrito por Juan, Martha y yo, publicado en italiano en 2003 y luego en español en Colombia en 2008 (D'Amore, Godino y Fandiño Pinilla, 2008).

Podría seguir, pero me detendré aquí; todo lo anterior está escrito para confirmar que la colaboración y el estudio del EOS siempre ha sido profundo y fuerte entre nosotros: Juan (quien la desarrolló) y nosotros que creímos en ella y contribuimos al análisis crítico y a su difusión.

Así que ahora está claro que, cuando vimos el índice de este libro y leímos la primera versión, nuestro corazón se aceleró; no nos parecía posible profundizar en mayores y más complejos detalles de la que consideramos una de las teorías más completas del panorama de la investigación en Educación Matemática. Sin embargo, así es como es: este libro profundiza en gran medida en el trabajo de décadas anteriores al proponer extensiones y análisis inesperados pero necesarios.

Dedicaremos las siguientes páginas a esbozar algunos puntos fundamentales de esta teoría, que deben interpretarse como una contribución a la difusión de EOS y como una orientación específica para la lectura de este nuevo y profundo libro.

NOTAS GENERALES SOBRE EOS

Con la acalorada discusión sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en los años ochenta, surgieron diferentes teorías que abordaban aspectos distintos de la Educación Matemática, tan diversos que aparentemente las diferencias epistemológicas y ontológicas asumidas por cada una de estas las hacían distantes e irreconciliables. Sin embargo, en España, Godino y Batanero (1994) encontraron en la noción de significado un punto de convergencia entre las múltiples posiciones de la época.

Para Godino y Batanero (1994), la idea de significado es central en la Educación Matemática porque está directamente relacionada con el problema de la comprensión de los objetos matemáticos por parte de los alumnos. En respuesta a esto, surge el Enfoque Ontosemiótico (EOS) como un sistema teórico que encuentra en la posición pragmática del significado (Peirce, 1958) una oportunidad de precisión conceptual que, vinculada a los conceptos de práctica matemática, y objeto matemático, permite una descripción detallada de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática compatible con diversas teorías desarrolladas en este campo.

El EOS parte de la definición de práctica como cualquier "acción o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar dicha solución a otros, validarla y generalizarla en otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Ese "alguien" que desarrolla una práctica matemática puede ser una persona o una institución, entendiendo esta última como un grupo de personas comprometidas con la resolución de un problema. De esta forma, se otorga un papel central a la resolución de problemas al considerarla como la actividad que hace emerger el conocimiento matemático, añadiendo así una visión antropológica a los planteamientos teóricos en Educación Matemática.

En cuanto a los objetos matemáticos, estos se entienden como entidades abstractas cargadas de aspectos culturales que emergen con roles representativos, instrumentales, reguladores, explicativos y justificadores en las prácticas matemáticas (D'Amore y Godino, 2007). Esto implica que tienen componentes personales y revelan un dualismo institucional. Un objeto matemático personal es la emergencia del sistema de prácticas personales que un sujeto experimenta durante su proceso de aprendizaje; mientras que el objeto institucional tiene un carácter social que corresponde al dominio del problema en donde es recibido y propuesto por una institución (Godino y Batanero, 1994). De esta manera, el significado se define como la correspondencia que se establece entre un objeto matemático y el sistema de prácticas en donde emerge y del que forma parte.

Otro aspecto que destaca el EOS es que el carácter cultural de las prácticas matemáticas trae consigo la necesidad de utilizar el lenguaje como medio para comunicar con los demás; así, en la actividad matemática son esenciales los procesos de interpretación, entendiendo la noción de función semiótica como aquella relación de dependencia entre los diversos objetos que emergen y regulan las prácticas matemáticas, permitiendo modelar y describir el conocimiento personal e institucional de los objetos matemáticos.

Precisamente ante la búsqueda de la modelización de las prácticas matemáticas, en el EOS se propone la noción de "proceso matemático" como una secuencia de acciones que se desarrollan en el transcurso de la resolución de un problema (Font y Rubio, 2016). La relación dinámica entre los objetos matemáticos y los significados a través de los procesos que se desarrollan en una práctica matemática nos lleva a concebir el aprendizaje como la apropiación que una persona hace de los significados institucionales de un objeto (Godino, Batanero y Font, 2020).

La aplicación de esta concepción de objetos, prácticas y significados en el análisis de situaciones concretas de aprendizaje y enseñanza de la Matemática ha llevado al EOS a reflexionar sobre la presencia de otros elementos no reconocidos en estas dimensiones epistémicas (institucional) y cognitivas (personal), ampliando las consideraciones de su sistema teórico con cuatro facetas más: afectiva, mediacional, interaccional y ecológica. Según Godino *et al.* (2020), gracias a esta ampliación se pueden abordar diferentes cuestiones y considerar diversos componentes de la práctica matemática:

- el surgimiento y desarrollo de la Matemática (aspecto epistémico), adoptando la visión pragmática y antropológica explicada anteriormente;
- las formas de conocer los objetos matemáticos y lo que significan para un sujeto (aspecto cognitivo), donde la función semiótica y la configuración onto-semiótica (relaciones entre procesos, prácticas y objetos) se utilizan para modelar y describir las prácticas matemáticas, así como para anticipar los conflictos que puede encontrar un aprendiz;
- la forma de concebir y relacionar la enseñanza y el aprendizaje (aspecto didáctico), para el cual se propone la configuración didáctica como herramienta para representar y estudiar las relaciones dinámicas entre tres aspectos: (1) las prácticas, objetos y procesos que el profesor considera necesarios para abordar un objeto matemático, (2) el sistema de funciones didácticas y los medios utilizados y (3) los factores cognitivos y afectivos presentes en el proceso de aprendizaje;

- los factores y las normas que condicionan, apoyan, y regulan las prácticas matemáticas (aspecto ecológico), afirmando que pueden ser de carácter social o disciplinar y que, a través de estos, es posible reflexionar, evaluar y modificar las prácticas matemáticas para su mejora;
- las motivaciones, intereses, actitudes, creencias y emociones tanto de alumnos como de profesores (aspecto afectivo), entendiendo que inducen y condicionan las prácticas matemáticas, por lo que están directamente relacionadas con el grado de implicación de los alumnos en el proceso de enseñanza y aprendizaje;
- el tipo de acciones y recursos que se deben utilizar en un proceso de enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático específico (aspecto mediacional), aludiendo a la importancia de la disponibilidad y uso oportuno de los recursos materiales y temporales.

Estas facetas que se proponen en el EOS están relacionadas entre sí y pretenden dar respuesta a los requisitos de descripción y prescripción que, según Font y Godino (2011), debe abordar la Educación Matemática. Por tanto, el EOS no solo ofrece herramientas de estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje en todas sus facetas, sino que pone a disposición de docentes e investigadores un conjunto de criterios que les permiten estudiar, reflexionar, evaluar y orientar la mejora de dichos procesos. Estos criterios están asociados a cada una de las facetas y se presentan como el resultado de un proceso consensuado de reconocimiento de los resultados de las múltiples teorías de la Educación Matemática, por lo que no se plantean como una guía rígida a considerar por los profesores, sino como un punto de partida en la búsqueda de la consolidación de la Educación Matemática como una disciplina científica de impacto social.

Es precisamente el estudio de los procesos para mejorar el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática lo que conduce a uno de los constructos centrales del EOS, la idoneidad didáctica. Para el EOS, la Educación Matemática tiene como preocupación primordial la identificación y el estudio de los problemas y factores que condicionan el aprendizaje de la Matemática, con el fin de aportar soluciones alternativas o mejores. Por esto, propone que, si bien no existen “clases buenas o malas”, es importante contar con criterios que permitan reflexionar sobre lo que sucede en el aula y tomar decisiones que conduzcan a prácticas significativas para el aprendizaje de los alumnos, siendo la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje el estado de equilibrio entre los criterios de las facetas del EOS. Esta idoneidad se relaciona con los factores contextuales, culturales e históricos en los cuales se enmarcan las prácticas matemáticas.

También queremos mencionar, al interior del EOS, los aportes de las dos últimas décadas en relación con la conexión entre este sistema teórico y la formación del profesorado de Matemática. En este sentido, el EOS ha propuesto un modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) basado en tres dimensiones: (1) didáctica, que alude al conocimiento de los profesores en relación con las seis caras del EOS ilustradas anteriormente; (2) matemática, que corresponde al conocimiento de la Matemática, sus problemas, procedimientos, objetos y conexiones; (3) objetivo didáctico-matemático, relativo al conocimiento de las normas y metanormas de los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como a la evaluación de la idoneidad didáctica (Pino-Fan y Godino, 2015).

El CCDM se propone como un modelo de doble intención: por un lado, permite estudiar y describir el conocimiento del profesor y, por otro, proporciona criterios para determinar los factores a considerar en el diseño de los planes de formación del profesorado. En particular, se propone el análisis, diseño, implementación y evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje a través de las facetas y criterios del EOS como posibilidad para la gestión de la competencia profesional del profesor de Matemática.

Las posibilidades de expansión del EOS son múltiples por su disposición al diálogo e interacción con los avances de todas las teorías de la Educación Matemática, discutiendo y superando naturalmente las diferencias epistemológicas y ontológicas existentes. Y es por esto por lo que este nuevo libro era esperado, pues propone avances y elementos no presentes en los análisis precedentes, a completar de una forma crítica y significativa los estudios anteriores.

ESTE LIBRO

Dado el éxito internacional del EOS y las diferentes interpretaciones que surgieron tras su difusión, junto con las otras teorías que se crearon antes, la difusión internacional del EOS es notable; tanto es así que considero esta obra explicativa de su creador como detallada, profunda y crítica.

Este nuevo texto de Juan hace referencia a teorías que no están solo en la base de EOS, lo que amplía su estudio, significado y aplicaciones. Es relevante que haya muchas referencias a actividades matemáticas concretas y de diversos tipos, con ejemplos explícitos tratados en detalle.

La Matemática se presenta con múltiples facetas, todas coherentes, pero que requieren interpretaciones, lenguajes y métodos distintos, que son explicados y discutidos. El análisis de las diferentes teorías del significado y sus relaciones con el EOS es profundo y útil, en particular, en lo que a mí respecta, los estudios de Peirce.

Son interesantes los análisis relativos a la teoría del significado en relación específica con la Educación Matemática. Esta, la Educación Matemática, se presenta, discute y analiza desde diversos puntos de vista, que no solo son exhaustivos, sino que finalmente le otorgan un sentido amplio que muchas otras teorías no logran darle.

En mi opinión, no solo son importantes las similitudes, sino también y quizás sobre todo las diferencias que casi nunca se alcanzan a ver en ocasiones similares. También en este caso, los ejemplos concretos son apropiados y significativos, especialmente las secciones sobre los números naturales, el concepto de función y por tanto el lenguaje de las relaciones, piedras angulares de la Educación Matemática en todo el mundo.

Es efectiva y necesaria la sección que lleva el nombre de: "Aproximación ontosemiótica al dominio afectivo en educación matemática", tema ausente en muchas otras obras que abordan temas didácticos, pero central y significativo.

En el capítulo 4 se desarrolla una Teoría del diseño educativo matemático basada en el EOS y se examina la dimensión normativa en todos sus aspectos específicos y de gran interés, como nunca lo había visto antes, con detalles muy definidos (Normas epistémicas, Normas ecológicas, Normas sobre interacciones, Normas mediacionales, Normas cognitivas, Normas afectivas, Dimensión metanormativa). En todo el libro se examinan los criterios de idoneidad didáctica y la dinámica de un proceso educativo-instruccional (en las trayectorias subyacentes epistémica, instruccional, cognitiva y afectiva).

Me parecen eficaces los párrafos destinados al análisis de las perspectivas teóricas relacionadas con el diseño, temas a la vez concretos, pero también profundamente teóricos y analíticos.

Desde el nacimiento de la teoría EOS, recuerdo que se resaltaron aspectos que han sido objeto de discusión y que hoy se presentan con bastante profundidad y detalle, algo que Juan llama "Teoría de la idoneidad didáctica" basada en diversas facetas (epistémica, ecológica, mediacional, interaccional, cognitiva, afectiva), que son interesantes por sí mismas, pero sobre todo por sus interacciones, tema que ocupa un papel central en este libro.

Lo expresé líneas arriba, y lo repito aquí: Juan siempre presenta en profundidad las relaciones del EOS con otras teorías sobre temas centrales, relaciones a veces con acuerdos parciales.

Juan presta mucha atención al docente, a su profesionalidad, a la conciencia de su papel y a su formación, un tema muy querido para mí y que he abordado en muchas ocasiones pero que, en este libro, consigue no solo ser un tema concreto, práctico, real, sino también de profundo carácter teórico.

Aprecié mucho el capítulo 7, dedicado al sistema teórico que subyace a EOS, de sutil y precisa profundidad cultural científica, hasta el punto de proponer EOS como marco teórico de investigación.

El tema de las relaciones entre diferentes teorías es actual, como yo mismo cito en muchos estudios de los últimos 10 años y como invito a mis alumnos a estudiar; por lo que son bienvenidos los párrafos relativos a las concordancias y complementariedades con otras teorías, como las siguientes: Teoría de situaciones didácticas, Teoría antropológica en didáctica de las matemáticas, Educación matemática realista, Teoría APOE, Teoría de la objetivación, Programa etnomatemático. Juan no solo capta las diferencias, sino también las similitudes, y esto desde dos puntos de vista: sus constituyentes y las diferencias de uso en la práctica didáctica.

Párrafos finales de prestigio cultural pero también de generosidad intelectual, los destinados a la comparación de teorías según la dualidad comprensión-uso (uno de los temas más recurrentes en la obra de Juan) y las cuestiones abiertas dentro del sistema teórico de EOS, como herramienta en constante evolución. Lo que atestigua, en mi opinión, su visión crítica y autocrítica, de gran fortaleza intelectual.

Datos de la obra

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática: Fundamentos, herramientas y aplicaciones.* Editorial Aula Magna. McGraw-Hill Interamericana de España, S. L. https://hdl.handle.net/10481/93596

REFERENCIAS

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Fúneme Mateus, C. C., Iori, M., y Santi, G. (2022). *Teorie rilevanti in Didattica della matematica.* Bonomo. [Versión en idioma español: (2024). *Teorías relevantes en Educación Matemática*. Prólogo de Rodolfo Vergel. Magisterio].

D'Amore, B., y Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 191–218.

D'Amore, B., Godino J. D., y Fandiño Pinilla, M.I. (2008). *Competencias y matemática*. Magisterio.

Font, V., y Godino, J. (2011). Inicio a la investigación en la enseñanza de las Matemáticas en secundaria y bachillerato. En J. Goñi (Ed.), *Formación del Profesorado. Educación Secundaria* (pp. 9–56). Grao.

Font, V., y Rubio, N. (2016). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. *La matematica e la sua didattica*, *24*(1-2), 97–123.

Godino, J., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *12*(2), 3–15.

Peirce, C. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce. 1931-1935*. Harvard UP.

Pino-Fan, L., y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Revista Paradigma*, *36*(1), 87–109.

Radford, L., y D'Amore, B. (Eds.) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Número especial de Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Cinvestav).

Sbaragli, S. (Ed.) (2011). *La matematica e la sua didattica, quarant'anni di impegno. Mathematics and its didactics, forty years of commitment. In occasion of the 65 years of Bruno D'Amore*. Proceedings of International Conference, October 8, 2011. Department of Mathematics, University of Bologna. Pitagora.

TEXTOS DE REFERENCIA

D'Amore, B. (2020). Un estudio del desarrollo de la Didáctica de la Matemática con los medios teóricos del EOS. En AA. VV. (2020), Memorias del I Simposio de Educación Matemática (I SEM V) *Educación matemática en tiempo de pandemia*, Tomo I, Universidad Nacional de Luján, Argentina, pp. 6-11.

D'Amore, B., y Fandiño Pinilla. M. I. (Editors) (2015). *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y teórica*. Ediciones Universidad De La Sabana.

D'Amore, B., y Fandiño Pinilla, M. I. (2017). Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la Didáctica de la Matemática. Theoretical reflections on the basis of the onto-semiotic approach to Didactic of Mathematics. En: J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.) (2017). *Actas del II Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico*. Granada, 23-26 marzo 2017. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

D'Amore, B., y Fandiño Pinilla, M. I. (2020). Historia del desarrollo de la Didáctica de la Matemática. Un estudio realizado con los medios teóricos de la EOS (Enfoque Onto-Semiótico). *Paradigma*, *41*(1), 130-150. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p130-150.id870

Font, V., Godino, D.J., y D'Amore B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematical education. *For the learning of mathematics*, *27*(2), 2–14. http://www.jstor.org/stable/40248564

Font V., Godino J. D., y D'Amore B. (2010). Representations in mathematics education: an onto-semiotic approach. *International Journal for Studies in Mathematics Education*. *2*(1), 58–86.

https://doi.org/10.24844/EM3603.12

María del Socorro Valero Cázarez: promotora de la integración de la tecnología en el aula

Maribel Vicario Mejía[1]

La doctora Valero nació el 10 de noviembre de 1954 en la Ciudad de Ébano en el estado de San Luis Potosí. Estableció su lugar de residencia en Ciudad Madero, Tamaulipas. Con la influencia de sus padres, ambos docentes, en 1976 ingresó al sistema educativo como profesora de música en nivel secundaria. En 1980 se gradúa de la Licenciatura en Ingeniería Química por el Instituto Tecnológico de Ciudad Madero, Tamaulipas, y en 1982 se integra como profesora del Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No. 164 en la misma ciudad. Posteriormente realiza estudios de Maestría en Educación con Especialidad en Matemáticas por el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Tampico. Obtiene el Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

Para el desarrollo de su investigación doctoral bajo la dirección del doctor Crisólogo Dolores, se estableció en la ciudad de Chilpancingo en el estado de Guerrero por un año, concluyendo su trabajo en una publicación "Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar" en la revista *Thales* en 2004, tema que marcó un parteaguas en el rumbo de su carrera como profesora de matemáticas, al reconocer que

[1] Universidad Autónoma de Guerrero, mvicario.maribel@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-0703-1710

el sistema escolar priorizaba el lenguaje simbólico por encima de las otras representaciones, lo que la motivó por estudiar y mostrar la matemática de forma distinta.

Como profesora disruptiva por naturaleza, le permitió buscar que las matemáticas fueran más cercanas a sus estudiantes, por tanto, en su búsqueda por presentar de forma distinta a la tradicional la enseñanza de la matemática, como bien lo decía ella "llevar la matemática del mundo real al aula"; en 2011, se integró como consultora en tecnología educativa en Texas Instrument (TI), en la que se centró en realizar capacitaciones a la comunidad de profesores de matemáticas de distintos niveles educativos de México y Latinoamérica usando la tecnología de TI, realizó traducciones de propuestas de aula, diseños para el aula, los cuales se reflejaron en la revista *Innovaciones educativas* de TI.

Esta experiencia previa, le permitió destacar fuertemente dentro de la matemática educativa, con la integración de herramientas tecnológicas para la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Sus diseños se pueden consultar en la página www.calculoparatodos.com, en la que presenta los diseños didácticos: con applets de Geogebra (partograma, COVID-19, entre otros), con el uso del MathBox para la modelación de fenómenos y con el uso de simulaciones (epidemia, embarazo adolescente) con el software Netlogo. Estos diseños se centraron en el reconocimiento de las funciones polinómicas, exponenciales y ecuaciones logísticas, además de sus derivadas.

En el camino de la innovación, estuvo cobijada por sus compañeros de su centro de trabajo con los que desarrolló varios proyectos, entre ellos un laboratorio de matemáticas. Por alumnos como Héctor Balderas quien desarrolló el conocido estuche de prácticas MathBox, compuesto por una tarjeta Arduino, la placa Cálculo para Todos y sensores como: el ultrasónico, el de temperatura, el aerogenerador, el panel solar, luminosidad, capacitor. Por el doctor Corey Brady quien la apoyaba en los diseños y simulaciones desarrollados con el software NegLogo. Por el doctor Lezama quien se interesó por promover tanto los diseños de modelación como los de simulación.

Entre los proyectos promovidos y desarrollados se encontró como líder del proyecto de innovación hacia la reconfiguración del perfil profesional de un ingeniero a profesor de matemáticas del nivel medio superior, asesora del proyecto aprendizaje colaborativo en geometría analítica basado en el uso de una red inalámbrica de calculadoras gráficas horas y líder del proyecto centro capacitador de profesores de matemáticas de la zona sur del estado de Tamaulipas en el uso de herramientas digitales para la corporación del conocimiento matemático.

Tuvo logros obtenidos por la integración de la tecnología en la enseñanza de la matemática: fue finalista en el XX Concurso Nacional de Prototipos, Primer lugar en el XXI Concurso Nacional de prototipos Didácticos 2019 organizado por la UEMSTIS y, finalista Nacional en el Premio Docente Extraordinarios: National Teacher Prize México 2020, que organiza Movimiento STEAM.

Como participante activa de la Red de Cimates, de la Comunidad Geogebra Latinoamericana, y del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, participó en diferentes presentaciones de ponencias, talleres y conferencias en estas y otras comunidades académicas como el Seminario de Enseñanza de Cálculo, promoviendo sus diseños tanto en formato virtual como presencial en México y Latinoamerica.

Entre sus publicaciones, destacan el reporte de las experiencias didácticas al ejecutar sus diseños propuestos en la página www.calculoparatodos.com para el salón de clases. Por citar algunos, *Una experiencia didáctica con estudiantes de bachillerato en torno a la modelación de los datos del COVID19 en México*, *Aproximación interdisciplinar STEM con recursos tecnológicos para el tratamiento de conceptos de física y matemáticas*

Sin duda, su calidez humana le permitió lograr este camino e influir en todos los que buscamos integrar la tecnología en el aula.

 https://doi.org/10.24844/EM3603.13

In Memoriam Ramiro Ávila Godoy

Silvia Elena Ibarra Olmos,[1] Agustín Grijalva Monteverde[2]

Ramiro Ávila Godoy fue un hombre polifacético. Públicamente destacó como profesor, luchador social, líder sindical, investigador, funcionario; en su vida privada, fue hijo, hermano, esposo, padre de familia y amigo, siempre incondicional. Su apego y respeto hacia la naturaleza humana lo tradujo en disposición para apoyar a todo aquel que se lo solicitara.

Nacido en Empalme, Sonora, un 24 de julio de 1946, desde pequeño mostró inclinación a la docencia, cursando la carrera de profesor de escuela primaria en la ciudad de Guadalajara, entre 1961 y 1964. Posteriormente, en 1965, ingresó a la Escuela Normal Superior de la Ciudad de México, en las especialidades de Física y Química, ejerciendo a partir de su titulación como profesor de esas asignaturas en su estado natal.

Con gran sensibilidad social, Ramiro fue un acucioso crítico de su entorno, en un periodo en donde la represión gubernamental estaba a la orden del día y, de manera injusta, fue encarcelado de 1971 a 1976, lapso en el cual estudió leyes autodidácticamente, para estar en condiciones de conocer a detalle cómo podría defenderse de las acusaciones que se le imputaban. Enamorado del teatro, no desaprovechó el espacio y formó una pequeña compañía que, bajo

[1] Universidad de Sonora, México. silvia.ibarra@unison.mx; orcid.org/0000-0002-1344-2516.
[2] Universidad de Sonora, México. agustin.grijalva@unison.mx; orcid.org/0000-0003-0306-5945.

su dirección, montó y presentó varias obras. Con la inclinación docente siempre presente, organizó círculos de estudio para los compañeros que, como él, estaban privados de la libertad; asimismo, desde ahí inició algunos cursos de la Licenciatura en Matemáticas. Finalmente, y con la frente en alto, al no comprobársele delito alguno, salió de prisión sin resentimientos, compartiendo siempre que fue una etapa muy complicada de su vida, pero contribuyó a volverlo una persona más analítica y reflexiva.

Ya en libertad, reinició su actividad como profesor, incorporándose en 1977 al Colegio de Bachilleres de Sonora, en Ciudad Obregón, ahora como profesor de matemáticas, actividad que realizó ininterrumpidamente hasta 2024. Con su notoria facilidad para ejercer liderazgo, pronto se convirtió en líder del sindicato del colegio, encabezando luchas memorables en búsqueda de mejores condiciones laborales.

Circunstancias personales lo llevaron a cambiar de residencia hacia la ciudad de Hermosillo, aprovechando para concluir la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Sonora, (UNISON), institución a la cual se incorporó como profesor en 1983 y donde laboró hasta su jubilación el primero de septiembre de 2024. En la UNISON estudió la Maestría en Matemática Educativa promovida nacionalmente por un grupo de matemáticos encabezado por los doctores Eugenio Filloy y Carlos Ímaz, continuando su actividad docente dentro del Programa Nacional de Formación de Profesores de Matemáticas, atendiendo a cientos de profesores de bachillerato y de nivel superior.

Con esta experiencia, Ramiro y otros distinguidos colegas crearon el Programa de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa de la UNISON, iniciando actividades el 12 de octubre de 1990, siendo él su primer coordinador. Con innumerables dificultades y circunstancias desfavorables enfrentadas bajo su conducción, pero con visión y mano firme, el posgrado logró un éxito manifestado mediante el impacto regional a lo largo de 34 años ininterrumpidos de actividad.

Una vez asentado el funcionamiento de este programa de posgrado, Ramiro estudió un doctorado bajo la dirección del doctor Eugenio Filloy, obteniendo el grado el 30 de junio de 1999, en la Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Desde entonces, sus actividades académicas escalaron tanto en cantidad como en alcance y calidad.

La cantidad de conferencias, ponencias, cursos impartidos a profesores de todos los niveles educativos en casi todo el territorio nacional, es tan grande que seguramente ni el mismo las contabilizó; en cada ocasión acudía siempre con la emoción de poder compartir sus reflexiones con el personal docente. Las direcciones de tesis, elaboración y conducción de proyectos, asesorías de iniciativas educativas gubernamentales, escritura de ponencias y artículos fueron actividades que llenaron sus días.

Algunos de los reconocimientos a los que se hizo acreedor fueron: Profesor Distinguido otorgado por la Universidad de Sonora en diciembre del 2001; Medalla por Trayectoria Académica otorgada por la Sociedad Matemática Mexicana en el XLII Congreso Nacional llevado a cabo en la Universidad Autónoma de Zacatecas en octubre del 2009; Medalla al Mérito Académico otorgada por El Colegio de Sonora en los festejos del Trigésimo Aniversario de su fundación en enero del 2012, en Hermosillo, Sonora; Reconocimiento por 40 años como profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, el 13 de septiembre de 2024.

Una faceta que requiere especial mención tiene que ver con el Ramiro profesor. Típico de su proceder era iniciar un curso, fuese curricular o no, planteando la siguiente pregunta: "¿Cuáles son sus expectativas en este curso? ¿Qué esperan lograr en el transcurso del mismo?", evadiendo con ello la costumbre de años en los que profesoras y profesores iniciaban presentando un programa de la asignatura del curso a estudiar, quizá previamente hablando de la importancia de la disciplina y temas por tratar, señalando la bibliografía básica y las formas de evaluación. Sus interrogantes abrían un panorama diferente, invitando a que desde el inicio cada quien se hiciera responsable de su propio aprendizaje.

Esta forma de iniciar era una muestra más de la gran capacidad que tenía para innovar, para sumar a las y los estudiantes en procesos reflexivos que, sin dejar de referirse a los objetos matemáticos, trascendían a los meros conocimientos técnicos y conceptuales y llevaban como propósito la discusión de formas de razonamiento generales, válidas en situaciones de la vida cotidiana misma, reflexionar que al emprender una actividad específica o un proyecto de mayor alcance, es necesario plantearnos los objetivos que buscamos y, consecuentemente, poder establecer las acciones que requerimos realizar para lograr dicho objetivo.

Ramiro, aun antes de que se hablara en México de la importancia del trabajo colaborativo, invitaba a modificar las prácticas docentes para impulsar el trabajo de aula organizando al alumnado en equipos. Por una parte, asumía que el conocimiento es una producción social y, por otra, apuntando que así se promovía el desarrollo de habilidades y características del ser humano que no se restringían a aprender matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas, decía, eran un pretexto para el logro de objetivos educacionales más generales que el conocimiento disciplinario. Con el trabajo en equipo se desarrollan procesos de comunicación que promueven las habilidades para expresar las ideas propias, las dudas, las suposiciones, así como la habilidad para escuchar los planteamientos de otras y otros. Había oportunidad, también, de promover valores como la amabilidad, la solidaridad, la tolerancia.

Esta concepción obligaba a modificar las prácticas docentes, abandonando las exposiciones magistrales como único recurso de enseñanza y promoviendo dinámicas de trabajo diferentes. Con una idea epistemológica muy clara de la génesis de las matemáticas, las clases habrían ahora de iniciarse con un problema, promoviendo el trabajo en equipo, lo cual era novedoso en la década de los 90.

Ramiro siempre procuró establecer conexiones entre el conocimiento matemático discutido en la escuela y la vida cotidiana de sus estudiantes. En lo que fue prácticamente su última conferencia, la cual llevó por título "¿Qué significa ser profesor?", manifestó que uno de sus principales objetivos al enseñar era que sus estudiantes aprendieran matemáticas, pero además que fuesen personas responsables, tenaces, solidarias, comunicativas y humildes. Ser profesor, insistió, conlleva como retos principales, conjuntar pasión, ciencia y arte para formar a un individuo como un ser humano integral.

Su prolífica vida concluyó de manera sorpresiva el 8 de octubre de 2024. Su partida deja, en algún sentido, huérfana a la familia académica que contribuyó a crear.

Autor de correspondencia
Silvia Elena Ibarra Olmos
Domicilio postal: Blvd. Luis Encinas J, Calle Av. Rosales &,
Centro, 83000 Hermosillo, Son.
silvia.ibarra@unison.mx

 https://doi.org/10.24844/EM3603.14

In Memoriam Eduardo Mancera Martínez (1952 – 2024)

Eduardo Basurto Hidalgo[1]

El 31 de octubre de 2024 la comunidad académica, recibió la lamentable noticia de la pérdida de nuestro colega y amigo Eduardo Mancera Martínez. Su fallecimiento representa una pérdida irreparable para la matemática educativa, por tal motivo, con una profunda mezcla de tristeza y gratitud, buscaré honrar su memoria en el presente texto.

La formación académica de Eduardo estuvo totalmente ligada al Instituto Politécnico Nacional, estudió en la Escuela Prevocacional No.1, posteriormente en la Vocacional No. 4 y para 1975 se graduó de la Licenciatura en Física y Matemáticas por la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional. Obtuvo el grado de Maestría en 1982 y el de Doctorado en Ciencias por el Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional en 1996 con su trabajo: "Concepciones de maestros expertos en la enseñanza de la matemática por medio de la resolución de problemas"

Eduardo siempre mencionaba que para comenzar a entender la educación se debía ser muy entrometido y, por tanto, involucrarse de diversas maneras en tantos niveles educativos como fuera posible, mismo acto que realizó a lo largo de su trayectoria profesional.

[1] Representante Nacional del CIAEM, Universidad La Salle, Benemérita Escuela Nacional de Maestros basurto.e@gmail.com

Desde sus inicios estuvo totalmente comprometido con la enseñanza de las matemáticas, siendo docente en educación secundaria entre 1972 y 1975, de igual manera en media superior en el Colegio de Ciencias y Humanidades, planteles Sur y Vallejo en la década de los 70, misma época en que comenzó su labor en educación superior en diversas instituciones como la Universidad Nacional Autónoma de México, el Instituto Politécnico Nacional, la Universidad Autónoma Metropolitana, la Universidad Pedagógica Nacional, la Universidad de las Américas, la Universidad Estatal de California, la Universidad Iberoamericana, la Universidad Veracruzana, la Universidad de Baja California, la Universidad Autónoma de Sinaloa, entre muchas otras tanto nacionales como internacionales donde dejó huella como docente antes y después de jubilarse.

A nivel posgrado colaboró en varias de las instituciones mencionadas impartiendo diversos cursos, y en la dirección de tesis de maestría y doctorado, además de ayudar a la creación y consolidación de programas de especialización, maestría y doctorado en Educación Matemática, como los de la Universidad Veracruzana, la Universidad Autónoma de Sinaloa, la Universidad de Baja California y más recientemente en el Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa en el sureste de México.

Otro aspecto relevante en la trayectoria de Eduardo fue su capacidad para involucrarse en proyectos relacionados con la educación matemática desde enfoques distintos a la docencia; en desarrollo curricular participó en la elaboración de diversos planes y programas de estudio a nivel, básico, medio, superior y posgrado entre los que destacan el Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas, del CINVESTAV del IPN, así como su destacado papel en la Reforma Educativa del Programa de Modernización de la Educación Básica, denominado Prueba Operativa, (1989 a 1993).

Su trayectoria académica y de gestión lo llevó a ocupar diversos cargos como funcionario entre los que destacan, secretario técnico de la Subsecretaría de Educación Media de la Secretaría de Educación Pública para el programa de Modernización Educativa, asesor de la Subsecretaria de Educación Básica y Media de la Secretaría de Educación Pública (1991 a 1993), subdirector de Innovación Educativa en la Dirección de Investigación y Comunicación Educativa del Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (1993 a 1996), Secretario Académico de la Universidad Pedagógica Nacional (1996 a 1999).

Eduardo, fue un gran impulsor del uso de tecnologías digitales en la educación matemática en toda América Latina, siendo coordinador nacional del

Programa Latinoamericano con Calculadoras para la Educación Matemática, financiado por Texas Instruments y apoyado por la UNESCO (1995 a 2000); líder académico de Casio Educación México, (2009 a 2015); director del c@mpus de las matemáticas, de Educ@ 10, proyecto de Virtual Educa y; co-coordinador del Programa Educativo de Hewlett Packard en el uso de tecnología para el aula en América Latina (2014 a 2019) llevando a todos y cada uno de los países de América y el Caribe ideas innovadoras sobre el aprovechamiento de diversas herramientas de tecnología digital.

En lo que refiere a la investigación en matemática educativa, tuvo contribuciones relevantes como: "Currículo para el año 2000" investigación sobre la educación primaria, realizada para la Universidad Pedagógica Nacional (1984); "Manejo de los diferentes significados e interpretaciones del concepto de fracción", estudio exploratorio con estudiantes que inician en el nivel medio básico, investigación realizada en la UPN conjuntamente con Alicia Ávila Storer (1989-1990); "Evaluación de los materiales didácticos del área de Matemáticas del Modelo General de Innovación Educativa", realizada en el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (1988); "Third International Mathematics and Science Study" por parte de la Subsecretaría de Educación Media de la Secretaría de Educación Pública (1992). Coordinó, además, varios proyectos de investigación sobre el uso de computadoras y materiales multimedia en el Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (1993-1995), "Tendencias del pensamiento matemático y currículum", financiado por CONACyT y coordinado por el doctor Luz Manuel Santos del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV del IPN (1999), entre otros proyectos.

Un aspecto clave en la carrera de Eduardo fue la divulgación, en este sentido fue autor y coautor de más de cincuenta libros de texto con prestigiadas casas editoriales, entre las últimas producciones está la coordinación del equipo autoral de los actuales libros de texto oficiales a nivel primaria de Paraguay. También publicó diversos artículos de investigación, compendios y memorias de jornadas, reuniones, y congresos a nivel nacional e internacional, en este rubro es destacable que fue uno de los fundadores de la revista *Eduación Matemática* en la cual participó con varios artículos, entre ellos el primer artículo del número 1 titulado: "Diagnóstico de habilidades computacionales y actividades para remediar los errores", cuya autoría comparte con Alicia Ávila, otro aspecto que Eduardo impulsó en torno a la divulgación fue el desarrollo de materiales de apoyo a docentes proponiendo alternativas didácticas en materiales como

"Matematebloquemática", "Errar es un placer", "Saber matemáticas es saber resolver problemas", de la Colección Formación de Docentes de Matemáticas, SIRVE, México (2016), además siempre mencionó que lo más importante en un docente es tener ideas claras de lo que desea promover con su enseñanza.

Mostró una gran capacidad de convocatoria al participar activamente en la organización de múltiples eventos académicos como: veinte congresos nacionales de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, de la cual fue presidente (1988-1989), así como del I, II y III Congreso de Educación Matemática para América Central y el Caribe (2013, 2017, 2021), de igual manera fue miembro del Comité Internacional del Congreso Iberoamericano de Educación Matemática en varias ocasiones. Su papel como parte del Comité Interamericano de Educación Matemática fue clave llevándolo a ocupar diferentes posiciones en el Comité Ejecutivo hasta llegar a ser presidente en 2023. En su haber logró traer la Conferencia Interamericana de Educación Matemática en 2007 y 2015 a nuestro país. Eduardo fue mucho más que un académico brillante, fue un verdadero tejedor de redes y comunidades. Su habilidad para conectar personas con intereses comunes y su incansable energía para organizar seminarios, congresos y espacios de diálogo crearon oportunidades únicas para el intercambio de ideas y la innovación. Bajo su liderazgo, comunidades académicas florecieron, dejando un legado que sigue inspirando a quienes buscan mejorar la educación desde el trabajo colectivo.

Eduardo mencionaba que habría impartido más de 200 conferencias a nivel nacional e internacional y, de igual manera, sería imposible nombrar todos los cursos de capacitación y actualización docente que impartió, en este rubro pudo influir sin temor a dudas no solo en diferentes universidades, sino también en casi todas las escuelas normales de nuestro país, instituciones donde fue ganando la admiración, respeto y afecto de incontables colegas con los que, a lo largo de los años cultivó lazos de colaboración académica y sobre todo de amistad gracias a su simpatía y manera de ser siempre afable y sin pretensiones; era notable que nunca le gustó que se refirieran a él a partir de cargos académicos sino simplemente como Eduardo. Su apoyo a jóvenes académicos fue constante y genuino. Siempre encontraba tiempo para escuchar, orientar y, sobre todo, motivar a quienes comenzaban su carrera, dejando en ellos una marca imborrable.

Más allá de sus logros profesionales, quienes conocimos a Eduardo lo recordamos como una persona divertida, generosa y profundamente humana.

Siempre dispuesto a compartir un buen plato y una buena copa, era un gran amante de la música, especialmente del rock, miembro de algunas agrupaciones musicales llegó incluso a grabar un disco con alguna de sus bandas.

El legado de Eduardo Mancera no solo vive en sus proyectos, publicaciones e investigaciones, sino en cada estudiante, colega y amigo que tuvo la fortuna de cruzarse en su camino. Él nos enseñó que la matemática, cuando se imparte con pasión y empatía, tiene el poder de cambiar vidas.

Le sobreviven sus dos hijos Eduardo y Karen quienes siempre mencionó como su más grande orgullo.

Gracias por todo, descansa en paz tocayo.

 https://doi.org/10.24844/EM3603.15

In Memoriam: Mi padre, mi guía, mi ejemplo

Eduardo Iván Mancera Alarcón[1]

Padre, tío, cuñado, profesor, físico, matemático, colega, amigo, mi primer maestro de guitarra, presidente del CIAEM y muchas otras cosas más. Falleció el 31 de octubre del 2024 muy a tiempo para que mis tíos y abuelos lo acompañen a degustar los olores y sabores del cempasúchil, el pan de muerto, el whisky, los tacos al pastor y otros manjares que tanto le gustaban para, posteriormente, regresar todos juntos al Mictlán. Tuve que ser testigo presencial de como poco a poco su vida se extinguía de la respiración agitada al suspiro y, después, a la ausencia total de la misma. Mi hermana y yo tuvimos que ir diariamente al hospital, por seis semanas, para contemplar como seguía decayendo a pesar del esfuerzo y dedicación de los doctores y enfermeros que hicieron todo lo humana y profesionalmente posible para que recuperara su salud. Mis tías, mis primas y nuestro amigo Felipe lo fueron a visitar para intentar darle ánimos, pero él sabía que lo que estaba por suceder era inevitable.

Aún durante su tránsito hacia El Sueño Eterno mi querido padre me siguió dando lecciones: No debemos temerle a la enfermedad, los médicos son nuestros aliados y hay que acercarse a ellos para prevenir y atender cualquier padecimiento que tengamos. Si somos previsores tendremos mayores posibilidades de prolongar nuestra calidad de vida y enfrentar, con buen pronóstico, cualquier padecimiento.

Descansa en paz, amado padre.

Cuando esta zamba te cante,
en la noche, sola, recuerda,
mirando morir la luna,
cómo es larga y triste la ausencia.

Fragmento Zamba La nochera
Jaime Davalos / Ernesto Cabeza

[1] Músico Instrumentista Guitarrista por la UNAM